# MÉMOIRES

DE LA

# SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.



# MÉMOIRES

DE LA

# SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

## DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

## TOME SEPTIÈME.



**LIÉGE,**

CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES,
CHEZ C MUQUARDT.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS,
CHEZ RORET, LIBre.
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*.

1851.

# EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE

DE LA

# THÉORIE

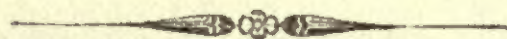
DES

# INTÉGRALES DÉFINIES,

PAR

**A. MEYER,**

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES DE BELGIQUE.






**BRUXELLES et LEIPZIG,**

CHEZ C. MUQUARDT, LIBRAIRE-ÉDITEUR.

**PARIS,**

CHEZ RORET, LIBRAIRE-EDITEUR,

RUE HAUTEFEUILLE, N° 10 *bis*.

Octobre 1851.

*Les formalités voulues par la loi ont été remplies.*



# PRÉFACE.

Lorsque je fus chargé, il y a quelque temps, d'un cours d'analyse supérieure à l'université de Liége, en commençant cet enseignement par une suite de leçons sur les intégrales définies, je n'ai pas tardé à m'apercevoir, qu'en l'absence de tout Manuel, des leçons sur ces matières, données de vive voix, ne seraient guère agréées des élèves, à cause de la difficulté qu'ils éprouvent de prendre des notes suffisamment exactes. Ce motif, joint à la haute utilité du cours, m'engagèrent à publier le texte de mes leçons; et ici je dois remercier la Société Royale des Sciences de Liége, qui a bien voulu m'aider, dans cette entreprise, de son désintéressé patronage.

Si, limité par les ressources pécuniaires, je n'ai pu faire entrer, dans le cadre de mon ouvrage, le développement de toutes les intégrales définies, du moins, en exposant les Méthodes essentielles pour en déterminer les valeurs, j'ai fait choix de celles de ces quantités qui se rencontrent le plus fréquemment dans les applications. Empêché, par la nature de mon ouvrage, d'exposer les propriétés des fonctions $l$ et L que M. Goudermain a introduites dans l'analyse, je regrette d'avoir été forcé d'omettre une Méthode

assez étendue, reposant sur le passage des fonctions hyperboliques aux fonctions circulaires.

Au reste, c'est moins le développement des intégrales elles-mêmes que j'avais en vue, en rédigeant ce précis, que de coordonner les diverses théories qui se rapportent à ces valeurs, et d'en donner un exposé élémentaire, suffisamment étendu. A cet effet, j'ai partagé mon travail en six livres : le 1er contient les principes généraux sur la formation et la transformation des intégrales définies; le 2me se rapporte aux diverses méthodes d'en déterminer les valeurs; le 3me donne la théorie des fonctions arbitraires exprimées par des séries périodiques, et des intégrales multiples; le 4me est consacré à la théorie des transcendantes d'Euler, et principalement aux fonctions gamma; le 5me fait connaître les principes pour la réduction des intégrales multiples; et enfin le 6me s'occupe de l'intégration des équations différentielles partielles à l'aide des intégrales définies.

Quant à la Méthode suivie dans ce Traité, je me bornerai à une seule observation. En supposant que l'on ait :

$$A=\int_a^b \varphi(x)dx,\quad B=\int_c^d \psi(x)dx,\ \text{etc.},$$

$$A+B\sqrt{-1}=A'+B'\sqrt{-1},$$

il sera toujours permis de conclure de cette relation les suivantes : $A=A'$, $B=B'$, pourvu que les valeurs des intégrales A, A', etc., soient toutes réelles et finies. On reconnaît, entre autre cas, par la formule (8), que cette conviction subsistera *à priori*, chaque fois que les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, etc., supposées réelles entre les limites des intégrations, ne cessent pas en même temps, d'être finies et continues entre ces mêmes limites.

En passant sous silence, plusieurs résultats qui me sont dûs, et que le lecteur instruit saura bien reconnaître, je dois néanmoins faire observer, qu'en fesant dépendre la théorie des fonctions arbitraires, d'un principe fondamental unique, j'expose, dans le 3me livre, cette doctrine d'une manière plus générale, et plus complète, qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Ce Traité contenant, comme tout ouvrage, des matières plus ou moins essentielles, il me reste à conseiller au Lecteur qui entreprend l'étude des intégrales définies, en prenant pour guide mon précis, de passer, à une 1[re] lecture, les endroits suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| De page | (48) | à la page | (57). |
| Id. | (143) | id. | (149). |
| Id. | (160) | id. | (163). |
| Id. | (177) | id. | (183). |
| Id. | (192) | id. | (202). |
| Id. | (263) | id. | (275). |
| Id. | (292) | id. | (306). |
| Id. | (309) | id. | (314). |
| Id. | (323) | id. | (332). |
| Id. | (339) | id. | (343). |
| Id. | (351) | id. | (358). |
| Id. | (377) | id. | (395). |
| Id. | (422) | id. | ( du 5[e] liv.) |

M. Kramp a publié dans son ouvrage sur les réfractions astronomiques, une Table qui donne les valeurs de l'intégrale $\int_t^\infty e^{-t^2}dt$ pour toutes les valeurs de $t$ de $\frac{1}{100}$ en $\frac{1}{100}$ depuis $t=0$ jusqu'à $t=3$ ; cette table étant très-utile et l'ouvrage de Kramp fort rare, j'ai cru devoir réimprimer cette table et la placer à la fin de ce traité.

A. MEYER.

Liége, Octobre 1851.

# ERRATA.

Page 25, 1re ligne, au lieu de Doricht, lisez Dirichlet.

» 41, 5e » » $\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2)dx$, » $\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2)dx =$

» 41, 6e » » (49') » (49).

» 57, 20e » » les valeurs de $y=\alpha$, lisez les val. de $y$ depuis $y=\alpha$.

» 82, 15e » » $x=\{$, lisez $x=\{_a^b$.

» 93, 7e » » A, » $A^x$.

» 105, 1re » » continues, » continu.

» 107, 7e » » $\frac{e^{-cx}+e^{-cx}}{x}$ » $\frac{e^{-cx}+e^{-ax}}{x}$.

» 129, 1re » » $\frac{du}{dt}\int_0^\infty, \frac{dv}{dt}\int_0^\infty$, lisez $\frac{du}{dt}=\int_0^\infty, \frac{dv}{dt}=\int_0^\infty$

» 138, 9e » » $\int_0^\infty$etc. $\int_0^\infty$etc., » $\int_0^\infty$etc., $\int_0^\infty$etc.

» 206, 13e » » le dével. après, lisez après le dével.

» 211, 9e » » $\varphi(x+0)\,(x+0)$, » $\varphi(x+0)$.

» 294, 3e, 4e, 5e, 6e, 8e, 19e au lieu de $n^\pi$ lisez $n\pi$.

» 302, 13e ligne, au lieu de *décrire* lisez *déduire*.

» 323, 12e » » form. ( ) » form. (47).

» 325, 8e » » *qui* » *que*.

» 328, 15e » » $\frac{1}{(b+cx+\frac{a}{x})}$ » $\frac{1}{(b+cx+\frac{a}{x})^u}$.

» 434, 19e » » *de la* » *et la*.

# EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE

DE LA

# THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES.

---

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Toute fonction f($x$), d'une seule variable $x$, représente une courbe dont l'abscisse est $x$, et l'ordonnée la fonction f($x$) elle-même. Quoique les notions que nous allons donner puissent se développer sans le concours de constructions géométriques, nous avons cru cependant devoir nous servir de ce moyen, afin d'abréger le discours, et de rendre plus sensibles les conceptions abstraites, qui se rattachent aux fonctions en général.

1. Si $x$ représente, sur l'axe des $x$, la valeur numérique de la distance actuelle d'un point mobile à l'origine, en concevant que ce point prenne une position *immédiatement* voisine, en s'écartant ou en se rapprochant de l'origine, cette position aura pour expression numérique, dans le premier cas, $x+dx$, et dans le second, $x-dx$.

Nous dirons alors que les points voisins, dont les distances à l'origine ont pour mesure $x, x+dx$ ou $x, x-dx$, sont *contigus*, afin d'exprimer par là que l'intervalle qui les sépare est nul, sans que néanmoins ces points coïncident.

Le $dx$ ajouté à $x$ avec le signe plus ou moins, n'a aucune valeur numérique, il exprime simplement que le point mobile a pris une position immédiatement voisine, la première possible, en suivant la loi de continuité. De là une double nature, ou signification de

$dx$ : d'être un accroissement, mais un accroissement sans valeur numérique. $dx$ a donc une *valeur analytique*, comme élément de génération par continuité, mais n'a pas de *valeur numérique.*

Il suit de cette manière d'envisager la différentielle $dx$, 1° que, sous le point de vue *numérique,* les égalités

$$\left.\begin{array}{l} x+dx=x \\ x-dx=x \end{array}\right\} \quad (1)$$

subsistent en toute rigueur;

2° Sous le point de vue *analytique*, les inégalités

$$\left.\begin{array}{l} x+dx>x \\ x-dx<x \end{array}\right\} \quad (2)$$

subsistent en toute rigueur.

2. Si $b$ désigne une quantité finie et réelle, on aura identiquement $\frac{bdx}{dx}=b$, ou $\frac{b}{dx}\times dx=b$. Mais le quotient $\frac{b}{dx}$ étant une valeur infiniment grande, si on désigne celle-ci, pour abréger, par $n$, on aura :

$$ndx=b. \qquad (3)$$

Si l'on conçoit sur l'axe des $x$ une suite de points contigus, dont le premier soit placé à la distance quelconque $x$ de l'origine, la progression arithmétique du 1er ordre

$$x, x+dx, x+2dx, \text{ etc.},$$

à raison constante $dx$, exprimera analytiquement la suite continue de ces points ; et chaque terme de cette progression aura la même valeur numérique que celui qui le précède, ou le suit immédiatement.

Soit $h$ la distance entre les points $x=b, x=a$, ou soit $b-a=h$; on pourra, en prenant $n$ infiniment grand, poser, conformément à la relation (3), $b-a=nda$, et alors la progression

$$a, a+da, a+2da, \ldots a+(n-1)da,$$

sera la construction analytique des points qui s'étendent sans interruption depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$.

3. Analyser une courbe dont l'ordonnée générale est $f(x)$, c'est suivre son cours, fixer sa forme, reconnaître sa nature pour tous ses points consécutifs ; et sous ce rapport $f(x)$ varie, en général, d'un point au point suivant. Ces variations continuelles, dues à la forme de la courbe, à la nature analytique de la fonction $f(x)$,

peuvent être nommées variations ou valeurs analytiques. Nous nommerons variation, ou valeur numérique, la différence mesurée, ou réduite en nombre, entre deux ordonnées de la même courbe; que ces ordonnées soient contiguës ou séparées.

Or, s'il arrive que pour une certaine abscisse $x=\alpha$, l'ordonnée correspondante $f(\alpha)$ devienne infinie, ou que ce soit l'ordonnée du point de jonction de deux arcs de courbes différentes, ou représente à la fois deux ordonnées différentes, savoir l'ordonnée du point final d'un premier arc de courbe, et l'ordonnée du point initial d'un second arc, disjoint du 1[er] dans la direction commune de ces deux ordonnées, on dit que la courbe, ou la fonction $f(x)$, est *discontinue* au point $x=\alpha$, $y=f(\alpha)$. Dans ce cas la différence entre les ordonnées continues $f(\alpha), f(\alpha+d\alpha)$; ou $f(\alpha), f(\alpha-d\alpha)$ aura une valeur numérique différente de zéro. Mais si pour aucune valeur de $x$, la fonction $f(x)$ devient infinie, ou reçoit plusieurs valeurs, c'est-à-dire, est indéterminée, les points de la courbe $y=f(x)$, se suivront sans interruption; la courbe, ou $f(x)$, sera une grandeur *continue*. Dans ce cas les valeurs numériques des différences

$$f(x+dx)-f(x),\ f(x-dx)-f(x)$$

seront nulles, et l'on aura :

$$\left.\begin{array}{ll} & f(x\pm dx)-f(x)=df(x)=0, \\ \text{ou} & f(x\pm dx)=f(x)+df(x)=f(x). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Mais en ayant égard au cours de la courbe, à la nature analytique de $f(x)$, qui change continuellement, les ordonnées $f(x-dx)$, $f(x+dx)$, dont l'une précède, et l'autre suit immédiatement l'ordonnée $f(x)$, différeront analytiquement de celle-ci, et sous ce rapport on aura

$$\left.\begin{array}{ll} & f(x\pm dx)-f(x)>0, \\ \text{ou} & f(x\pm dx)-f(x)<0. \end{array}\right\} \quad (4')$$

La différentielle $df(x)$ est donc nulle comme valeur numérique, mais ne l'est pas comme *variation*, c'est-à-dire, comme valeur analytique.

Les équations (4) et (4'), qui sont vraies chacune sous son point de vue, constituent le fondement du calcul différentiel. En les employant, tour à tour, conformément à leur nature analytique et numérique, les principes de ce calcul s'établissent d'une manière simple et rigoureuse.

4. Si nous nommons *ds* la distance sans valeur numérique des

deux points consécutifs de la courbe, qui répondent aux ordonnées contiguës $f(x)$, $f(x+dx)$, séparées par l'intervalle $dx$, le trapèze élémentaire dont les deux bases parallèles sont $f(x)$, $f(x+dx)$, et les autres côtés $ds$, $dx$, ayant $dx$ pour hauteur, aura, pour expression superficielle

$$\frac{f(x+dx)+f(x)}{2} \times dx;$$

et comme il s'agit ici d'une évaluation numérique, et que l'on a par conséquent, sous ce point de vue, en toute rigueur, $f(x+dx)=f(x)$, ce même trapèze sera exprimé par

$$f(x) \cdot dx. \ \ldots \quad (5)$$

5. Comme $f(x)$ n'est pas, en général, un polynome du 1^er^ degré, l'on voit que la suite des ordonnées contiguës

$$f(x),\ f(x+dx),\ f(x+2dx),\ \text{etc.} \quad (6)$$

ne constitue pas une progression du 1^er^ ordre, et par suite les différences premières ne sont pas constantes. Sous ce rapport analytique on peut dire que la différentielle d'une fonction est variable, quoique la valeur numérique de la différence entre deux termes consécutifs quelconques de cette suite soit nulle.

Les termes consécutifs de la suite (6) étant séparés par l'intervalle $dx$, il est clair qu'à cause de (5), les produits

$$f(x) \cdot dx,\ f(x+dx) \cdot dx,\ f(x+2dx) \cdot dx,\ \text{etc.}$$

exprimeront les valeurs superficielles d'une série de trapèzes élémentaires contigus, et l'on aura, pour la somme indéfinie $\int f(x)dx$ de ces espaces élémentaires, l'expression

$$\int f(x)dx = dx\,[\,f(x) + f(x+dx) + f(x+2dx) + \text{etc.}\,] \quad (7)$$

C'est l'aire indéfinie de la courbe prise à partir d'une abscisse quelconque $x$.

6. Les abscisses qui, selon le § 2, s'étendent d'une manière continue depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$, étant données par la progression

$$a,\ a+da,\ a+2da,\ \ldots\ a+\overline{n-1}\,da,$$

les ordonnées correspondantes seront respectivement

$$f(a), f(a+da), f(a+2da),\ \ldots\ f(a+\overline{n-1}\cdot da);$$

par suite, les trapèzes élémentaires, compris entre ces ordonnées, auront pour expressions les produits correspondants

$$f(a)\cdot da, f(a+da)\cdot da,\ f(a+2da)\cdot da,\ \ldots\ f(a+\overline{n-1}\cdot da)\cdot da.$$

La somme de ces trapèzes, s'étendant depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$, se nomme une *somme*, ou une *intégrale définie ;* les valeurs $a$ et $b$ des abscisses extrêmes en formant les limites. En supposant $b>a$, on écrit :

$$(8)\qquad \int_a^b \mathrm{f}(x)dx = da\,[\,\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(a+da) + \mathrm{f}(a+2da) + \ldots + \mathrm{f}(a+\overline{n-1}\,da)\,].$$

7. Soit $c$ une abscisse intermédiaire entre $a$ et $b$, savoir $a<b<c$, on pourra, en supposant toujours $\mathrm{f}(x)$ continue entre $a$ et $b$, admettre que l'aire définie, exprimée par la formule (8), soit partagée en deux parties, la 1re s'étendant de $x=a$ à $x=c$, et la 2de de $x=c$ à $x=b$, il est clair qu'on aura alors :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \int_a^c \mathrm{f}(x)dx + \int_c^b \mathrm{f}(x)dx. \qquad (9)$$

Plus généralement, soit

$$a<\alpha<\beta< \ldots <\omega<b,$$

on aura, par le même principe de décomposition :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \int_a^\alpha \mathrm{f}(x)dx + \int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)dx + \ldots + \int_\omega^b \mathrm{f}(x)dx. \qquad (10)$$

8. En admettant que $\mathrm{f}(x)$ soit une fonction continue, les intégrales

$$\int_{c-dc}^{c} \mathrm{f}(x)dx,\ \int_{c}^{c+dc} \mathrm{f}(x)dx,\ \int_{c-dc}^{c+dc} \mathrm{f}(x)dx \qquad (\alpha)$$

sont les aires de trapèzes dont la largeur est $dc$, c'est-à-dire des lignes droites ; par conséquent les valeurs numériques de ces aires sont nulles.

Donc, si $\mathrm{f}(x)$ est continu, on aura, sans aucune erreur numérique :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \int_{a+da}^{b} \mathrm{f}(x)dx = \int_a^{b-db} \mathrm{f}(x)dx. \qquad (10')$$

9. Soit $x=c$ l'abscisse d'un point de la courbe $y=\mathrm{f}(x)$ comprise entre $x=a$ et $x=b$, en sorte que l'on ait $a<c<b$, il est clair que $\mathrm{f}(c)$ sera l'ordonnée finale du groupe d'ordonnées contiguës

$$\mathrm{f}(a),\ \mathrm{f}(a+da),\ \mathrm{f}(a+2da),\ \ldots\ \mathrm{f}(c-2dc),\ \mathrm{f}(c-dc),\ \mathrm{f}(c)\,, \qquad (a)$$

et en même temps l'ordonnée initiale du groupe

$$f(c), f(c+dc), f(c+2dc), \ldots f(b-2db), f(b-db), f(b). \qquad (b)$$

Cela posé, nous dirons que *la fonction* f(x) *est continue ou discontinue au point* x = c, *selon que l'ordonnée finale* f(c) *de la suite* (a) *a la même valeur, ou non, que l'ordonnée initiale de la suite* (b).

Mais si, après avoir développé les fonctions $f(c-dc)$, $f(c+dc)$, on pose $dc=0$, il est clair que $f(c-dc)$ devient l'ordonnée finale $f(c)$ de la suite $(a)$, et $f(c+dc)$ coïncidera avec l'ordonnée initiale $f(c)$ de la suite $(b)$. On peut donc énoncer le principe suivant : *La fonction* f(x) *est continue ou discontinue au point* x = c, *selon que, en posant* dc = 0 *après les développements, on aura :*

$$(c) \quad f(c+dc)-f(c-dc)=0, \quad \text{ou} \quad f(c+dc)-f(c-dc) \lesseqgtr 0. \quad (d)$$

Soit de plus $\int f(x)dx = F(x) + C$, on aura, en général,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

et par conséquent

$$\int_{c-dc}^{c+dc} f(x)dx = F(c+dc) - F(c-dc).$$

On conclut de là ce théorème : en supposant que l'on ait $\int f(x)dx = F(x) + C$, *la fonction* F(x) *sera continue ou discontinue en* x = c, *selon que, en posant* dc = 0 *après l'intégration, on aura :*

$$(e) \quad \int_{c-dc}^{c+dc} f(x)dx = 0, \quad \text{ou} \quad \int_{c-dc}^{c+dc} f(x)dx \gtrless 0. \quad (f)$$

Si, dans le cas $(f)$, on fait $\int_{c-dc}^{c+dc} f(x)dx = \Delta$, cette relation constituera ce que Cauchy nomme une *intégrale singulière*. Soit toujours $\int f(x)dx = F(x) + C$, il est clair que l'aire $F(x)$ sera continue ou discontinue en $x-c$, selon que la courbe $y = f(x)$ sera continue ou discontinue au même point. Cela posé, comme on a, par la formule (10) :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-dc} f(x)dx + \int_{c-dc}^{c+dc} f(x)dx + \int_{c+dc}^{b} f(x)dx, \qquad (12)$$

il est clair qu'on aura

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-dc} f(x)dx + \int_{c+dc}^b f(x)dx\,, \qquad (11)$$

ou

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-dc} f(x)dx + \int_{c+dc}^b f(x)dx + \Delta\,, \qquad (11')$$

selon que $f(x)$ sera continu ou discontinu au point quelconque $x=c$, compris entre $x=a$, $x=b$. Il est bien entendu qu'après avoir effectué les intégrations, il faudra poser, dans ces formules, $dc=0$.

*Remarque.* Si $f(x)$ est discontinu au point $x=c$, on peut regarder l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ comme la somme de deux aires de courbes adjacentes s'étendant la 1[re] de $x=a$ à $x=c-dc$, la 2[de] de $x=c+dc$ à $x=b$, $dc$ étant toujours supposé $=0$. Cette convention donne

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-dc} f(x)dx + \int_{c+dc}^b f(x)dx\,.$$

Alors le terme $\Delta$ disparaît, ce qui est avantageux puisque ce terme rend presque toujours $\int_a^b f(x)dx$ imaginaire, infini ou indéterminé.

10. On pourra mettre la formule (8) sous une forme un peu différente, et plus générale, en admettant que les variables

$$\delta_1\,,\ \delta_2\,,\ \ldots\ \delta_{n-1}\,,\ \delta_n\,,$$

décroissent indéfiniment jusqu'à la limite $da$; en effet, alors on pourra écrire :

$$(13)\quad \int_a^b f(x)dx = \lim.\,[\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})]\,;$$

car si nous passons réellement aux limites, ce qui revient à remplacer chaque $\delta$ par $da$, on reproduit la form. (8).

11. La formule (8) subsiste encore dans le cas où $f(x)$ est une fonction continue imaginaire, de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x). \qquad (14)$$

En effet, on dit qu'une fonction de cette forme est continue, lorsque chacune des fonctions réelles $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ est dans ce cas.

Cela posé, on a d'abord :

$$f(x) = f[r(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)] = f(re^{x\sqrt{-1}}) = \varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x);$$

de là on déduit :

$$f(re^{a\sqrt{-1}}) = \varphi(a) + \sqrt{-1}\,\psi(a),$$

$$f(re^{(a+da)\sqrt{-1}}) = \varphi(a+da) + \sqrt{-1}\,\psi(a+da),$$

etc. etc.

$$f(re^{(a+\overline{n-1}\,da)\sqrt{-1}}) = \varphi(a+\overline{n-1}\,da + \sqrt{-1}\,\psi(a+\overline{n-1}\,da);$$

mais on a, par la form. (8),

$$\int_a^b \varphi(x)dx = da[\varphi(a) + \varphi(a+da) + \ldots + \varphi(a+\overline{n-1}\,da)],$$

$$\sqrt{-1}\int_a^b \psi(x)dx = \sqrt{-1}\,da[\psi(a) + \psi(a+da) + \ldots + \psi(a+\overline{n-1}\,da)];$$

donc, en ajoutant :

$$\int_a^b [\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x)]dx = da[\varphi(a) + \sqrt{-1}\,\psi(a) + \text{etc.} + \varphi(a+\overline{n-1}\,da) + \sqrt{-1}\,\psi(a+\overline{n-1}\,da)],$$

ou :

$$\int_a^b f(re^{x\sqrt{-1}}) = da[f(re^{a\sqrt{-1}}) + f(re^{(a+da)\sqrt{-1}}) + \ldots + f(re^{a+\overline{n-1}\,da)\sqrt{-1}})]. \quad (15)$$

12. Il est facile aussi d'étendre la form. (8) au cas d'une fonction de plusieurs variables.

En effet, soit la fonction des 2 variables $f(x,y)$ en ne fesant pas d'abord varier $y$, et en donnant à $x$ les valeurs continues

$$a,\ a+da,\ a+2da,\ \ldots\ a+\overline{n-1}\,da,\ \alpha,$$

où l'on suppose $\alpha = a + nda$, on aura, par la form. (8) :

$$\int_a^\alpha f(x,y)dx = da[f(a,y) + f(a+da,y) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,da,y)].$$

Mais si l'on multiplie par $dy$, et que l'on donne aux $y$ les valeurs continues

$$b,\ b+db,\ b+2db,\ \ldots\ b+\overline{m-1}\,db,\ \beta,$$

où l'on suppose $\beta = b + mdb$, il est clair que l'on aura :

$$\int_b^\beta dy \int_a^\alpha f(x,y)dx = da\Big[\int_b^\beta f(a,y)dy + \text{etc.} + \int_b^\beta f(a+\overline{n-1}\,da,y)\,dy\Big];$$

donc, en développant chacune des intégrales $\int_b^\beta f(a, y)dy$, etc. suivant la form. (8), on aura :

$$\begin{aligned}\int_b^\beta dy \int_a^\alpha f(x,y)dy = dadb\,[\,& f(a,b) + f(a+da,b) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,da,b)\\ &+ f(a,b+db) + f(a+da,b+db) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,da,b+db)\\ &+ f(a,b+2db) + fa+da,b+2db) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,da,b+2db)\\ &+ \text{etc.}\\ &+ f(a,b+\overline{m-1}\,db) + f(a+da,b+\overline{m-1}\,db) + \ldots\\ &+ f(a+\overline{n-1}\,da,b+\overline{m-1}\,db)\,]. \qquad (16)\end{aligned}$$

Ce calcul fait suffisamment connaître la marche qu'il faudrait suivre s'il s'agissait d'étendre la form. (8) à des fonctions de 3, ou d'un plus grand nombre de variables.

13. Il me reste encore à dire un mot pour justifier l'abandon que je fais, dans l'exposition des principes sur les intégrales définies, de la méthode des limites et de celle des infiniment petits.

1. *La méthode des limites se réduit à une identité absolue, telle que* $A = A$, *et ne donne rien.*

Soit en effet, $h$ l'accroissement fini, de $x$, et considérons la fonction $x^2$, on aura :

$$\frac{(x+h^2 - x^2}{h} = 2x + h\,;$$

donc :

$$\lim.\ \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x, \text{ pour } h = 0. \qquad (1)$$

Mais en fesant l'accroissement $h$ égal à zéro, on reproduit la fonction primitive $x^2$, et l'on aura, par l'équat. (1),

$$\frac{0}{0}=2x\,,$$

ou $$0=2x\cdot 0=0\,;$$

ou $$x^2-x^2=0\,,\ x^2=x^2.$$

Dans cette méthode il n'y a pas de développement, ou de génération, et par suite, cette méthode ne donne rien.

2. *La méthode des infiniment petits ne donne que des résultats approchés, et conduit à des conclusions absurdes, contradictoires.*

En effet, dans cette méthode une différentielle $d\mathrm{f}(x)$, n'est pas zéro ; elle a donc une valeur, qu'on nomme vaguement *infiniment petite ;* dès-lors en écrivant :

$$\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(x+dx)=\mathrm{f}(x)+d\mathrm{f}(x)\,,$$

on doit négliger $d\mathrm{f}(x)$, et par suite, le résultat ne pourra être qu'approché. Dans ce système on *néglige,* comme incomparablement plus petits, les infiniment petits d'ordres supérieurs, vis-à-vis des infiniment petits d'ordres inférieurs. Or comme, dans cette méthode, les infiniment petits, n'importe de quel ordre, ne sont pas nuls, les résultats obtenus ne peuvent être rigoureusement exacts, ce qui néanmoins est démenti par le fait. De là, une contradiction, ou une absurdité, savoir une méthode inexacte conduisant à des résultats rigoureux. Pour lever la contradiction, on a dû recourir à la fiction de la compensation des erreurs.

Dans la méthode des limites, on rejette la valeur analytique des différentielles, et on ne conserve que sa valeur numérique, qui est zéro; la génération des fonctions devient donc impossible, puisqu'on n'a pas de développement.

Dans la méthode des infiniment petits, on conserve la valeur analytique, mais on n'admet pas que la valeur numérique soit nulle. Ici la génération des fonctions devient possible, mais les résultats ne peuvent être qu'approchés, puisqu'on *néglige* les infiniment petits d'ordres supérieurs. Cependant les résultats qui devraient être approchés, sont rigoureux, cette contradiction provient de ce qu'on conserve aux différentielles une valeur différente de zéro.

L'on voit que le vrai système consiste à maintenir aux différentielles une existence, ou valeur analytique, et à les priver de toute valeur numérique. Cette double signification est une conséquence immédiate de l'idée même de la continuité ; et sans cette double signification, la construction analytique, au moyen du calcul, des diverses continuités de l'espace et du temps serait impossible.





# 1er LIVRE.

# PRINCIPES GÉNÉRAUX

DE LA

# THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES.

## I.

## PROPOSITIONS FONDAMENTALES.

—

### 1er Théorème.

f(x) *étant une fonction continue entre* a *et* b *et* $\varepsilon$ *désignant une fraction proprement dite, je dis que l'on a :*

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx=(b-a)\,\mathrm{f}\,[a+\varepsilon(b-a)].$$

*Démonstr.* Soient $\mathrm{f}(\alpha)$, $\mathrm{f}(\beta)$ respectivement la plus grande et la plus petite des quantités, $\mathrm{f}(a)$, $\mathrm{f}(a+da)$, ... $\mathrm{f}(a+\overline{n-1}\,da)$, on aura :

$$\begin{array}{lcc l}
\mathrm{f}(a)-\mathrm{f}(\alpha)<0, & \text{en même temps que} & & \mathrm{f}(a)-\mathrm{f}(\beta)>0, \\
\mathrm{f}(a+da)-\mathrm{f}(\alpha)<0, & » & » & \mathrm{f}(a+da)-\mathrm{f}(\beta)>0, \\
\text{etc.} & & & \text{etc.} \\
\mathrm{f}(a+\overline{n-1}\,da)-\mathrm{f}(\alpha)<0, & » & » & \mathrm{f}(a+\overline{n-1}\,da)-\mathrm{f}(\beta)>0;
\end{array}$$

donc, en multipliant ces intégrales par $da$, on aura, en ajoutant, et en ayant égard à la form. (8) :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx-n\,\mathrm{f}(\alpha)da<0 \quad \text{et} \quad \int_a^b \mathrm{f}(x)dx-n\,\mathrm{f}(\beta)da>0.$$

Comme ces résultats sont de signe contraire, il doit exister entre $a$ et $b$ une valeur $\gamma$ telle que l'on ait :

$$\int_a^b f(x)dx - nda\, f(\gamma) = 0. \qquad (17)$$

Soit donc $\varepsilon$ une fraction proprement dite, on pourra poser

$$\gamma = a + \varepsilon(b-a).$$

De plus, comme on suppose $a + nda = b$, l'égalité (17) devient :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f[a + \varepsilon(b-a)]. \qquad (18)$$

2$^{me}$ Théorème.

*En supposant que* $\psi(x)$ *reste toujours positif pendant que* x *varie de* $x = a$ *à* $x = b$, *et que* $\varphi(\alpha)$ *et* $\varphi(\beta)$, *soient respectivement la plus grande et la plus petite valeur de* $\varphi(x)$, *correspondantes aux mêmes variations de* x, *je dis que l'on a :*

$$\varphi(\alpha)\int_a^b \psi(x)dx > \int_a^b \varphi(x) \times \psi(x)dx > \varphi(\beta)\int_a^b \psi(x)dx.$$

*Démonstration.* On a, par hypothèse :

$$\varphi(\alpha) - \varphi(x) > 0, \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) - \varphi(x) < 0.$$

Comme $\psi(x)$ est positif dans l'intervalle $b-a$, on a aussi :

$$[\varphi(\alpha) - \varphi(x)]\psi(x) > 0, \quad \text{et} \quad [\varphi(\beta) - \varphi(x)]\psi(x) < 0,$$

et par suite

$$\int_a^b [\varphi(\alpha) - \varphi(x)]\psi(x)dx > 0, \quad \text{et} \quad \int_a^b [\varphi(\beta) - \varphi(x)](x)dx < 0;$$

ou :

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\alpha)\int_a^b \psi(x)dx &> \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx, \\ \varphi(\beta)\int_a^b \psi(x)dx &< \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

*Corollaire.* A cause des égalités (19), il faut qu'il existe une valeur $\varphi(\gamma)$, intermédiaire entre $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$, telle que l'on ait :

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(\gamma)\int_a^b \psi(x)dx\,, \qquad (20)$$

$\gamma$ étant une valeur comprise entre $a$ et $b$.

### 3me Théorème.

*Si* f(x) *reste continue depuis* x = a, *jusqu'à* x = b, *en supposant* b > a, *je dis que l'intégrale* $\int_a^b \mathrm{f(x)dx}$, *sera positive ou négative, selon que* f(x) *est positif, ou négatif, dans le même intervalle.*

Car on a :

$$\int_a^b f(x)dx = da\,[\,f(a) + f(a+da) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,da)\,].$$

Donc si les termes $f(a), f(a+da)$, etc., dont par hypothèse aucun n'est infini, ni indéterminé, sont tous positifs, ou tous négatifs, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ sera elle-même positive ou négative.

On étendra facilement ce théorème au cas de 2 variables, en fesant usage de la form. (16).

### 4me Théorème.

*Lorsque la fonction* f(x) *devient infinie pour* x = a, *l'expression*

$$\mathrm{f(a+dc)\cdot dc}$$

*a toujours une valeur finie différente de zéro.*

*Démonstration.* Comme f($x$) devient infini, pour $x=a$, on pourra écrire :

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x-a}\,;$$

donc, en remplaçant $x$ par $a+dc$, il vient :

$$f(a+dc) = \frac{\varphi(a+dc)}{dc} = \frac{1}{dc}\,[\,\varphi(a) + \varphi'(a)dc + \text{etc.}\,]\,;$$

d'où l'on tire :

$$f(a+dc)\cdot dc = \varphi(a). \qquad (20')$$

C'est cette valeur finie $\varphi(a)$, de $f(a+dc)\cdot dc$ que Cauchy nomme le *résidu* de la fonction $f(x)$.

Il nomme *résidu intégral* de $f(x)$, la somme des résidus de cette fonction relatifs aux diverses racines réelles ou imaginaires de l'équation

$$\frac{1}{f(x)}=0\ ,\ \text{ou}\ f(x)=\infty\,.$$

Il nomme résidu intégral défini, le résidu intégral pris entre des limites données, c'est-à-dire la somme des résidus correspondants à des racines dans lesquelles les parties réelles, et les coëfficients de $\sqrt{-1}$ ne devront pas dépasser certaines limites. Il nomme encore extraction des résidus l'opération par laquelle on les déduit de la fonction $f(x)$; il indique cette extraction en plaçant un $\mathcal{E}$ majuscule, initiale du mot extraction, devant la fonct. $f(x)$, qu'il place entre doubles parenthèses. Enfin, il emploie la notation

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x_0\ y_0}^{X\ Y} f[(x)]$$

pour indiquer la somme des résidus de $f(x)$, relatifs à celles des racines comprises entre les limites $x_0$, X; et les coëfficients de $\sqrt{-1}$ entre deux autres limites $y_0$, Y. M. Cauchy fait un usage très-étendu de ces notations dans ses nombreux écrits, c'est ce qui nous a engagé à les reproduire ici. Nous renvoyons, pour plus de détail, au Mémoire sur un nouveau genre de calcul, inséré par cet auteur dans les *Exercices de Mathématiques*, année 1826, page 11.

*Remarque*. Si l'équat. $\frac{1}{f(x)}=0$, a $m$ racines égales à $a$, ce qui suppose que la fonct. $f(x)$ soit de la forme

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^m}\ ,$$

alors, le résidu de la fonction $f(x)$, sera la valeur finie différente de zéro, marquée par l'expression :

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots(m-1)}\cdot\frac{d^{m-1}[dc^m f(a+dc)]}{dc^{m-1}}=\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{1\cdot2\cdot3\ldots(m-1)}\ ; \quad (20'')$$

Car on a : $dc^m f(a+dc)=\varphi(a+dc)=\varphi(a)+\varphi'(a)dc+\varphi''(a)\frac{dc^2}{1\cdot2}$

$$+ \dots + \varphi^{(m-1)}(a) \frac{dc^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots m-1} + \text{etc.}$$

En différentiant cette expression $m-1$ fois de suite par rapport à $c$, on trouve :

$$\frac{d^{m-1}[dc^m \cdot f(a+dc)]}{dc^{m-1}} = \varphi^{(m-1)}(a).$$

## II.

## TRANSFORMATIONS RELATIVES AUX LIMITES.

—

### 1er Problème.

*Réduire la limite inférieure à zéro.*

*Solution.* Soit $0 < a < b$, on aura, par la form. (9),

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx,$$

d'où :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx. \quad (21).$$

### 2me Problème.

*Renverser les limites.*

*Solution.* Par la form. (21) on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx,$$

$$\int_b^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^b f(x)dx,$$

donc, en ajoutant :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0 ;$$

d'où :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \quad (22).$$

3me Problème.

*Changer les signes des limites.*

*Solut.* Si dans l'expression $\int_a^b f(x)dx$, on pose :

$x = -z$, les limites $x = \begin{cases} b \\ a \end{cases}$ deviendront $z = \begin{cases} -b \\ -a \end{cases}$,
et on aura $dx = -dz$; donc

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_{-a}^{-b} f(-z)dz.$$

En renversant les limites, et en changeant $z$ en $x$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)dx ; \quad (23)$$

on a donc aussi :

$$\int_{-a}^{-b} f(x)dx = \int_b^a f(-x)dx. \quad (24)$$

4me Problème.

*La limite supérieure étant infinie faire dépendre l'intégrale proposée d'une autre dont la limite supérieure soit finie.*

*Solut.* Si dans l'intégrale proposée $\int_a^\infty f(x)dx$, on fait $x = z - \alpha$,

alors aux limites $x = \begin{cases} \infty \\ a \end{cases}$, répondront les limites $z = \begin{cases} \infty \\ a+\alpha \end{cases}$, et

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_{a+\alpha}^\infty f(z-\alpha)dz = \int_0^\infty f(z-\alpha)dz - \int_0^{a+\alpha} f(z-\alpha)dz$$

$$= \int_0^\infty f(x-\alpha)dx - \int_0^{a+\alpha} f(x-\alpha)dx. \quad (25)$$

Si $a$ est nul, on a :

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty f(x-\alpha)dx - \int_0^\alpha f(x-\alpha)dx. \quad (26)$$

On trouvera de même :

$$\int_0^\infty f(-x+\alpha)dx = -\int_0^{-\infty} f(x+\alpha)dx = -\int_6^{-\infty} f(x)dx + \int_0^\alpha f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\alpha f(x)dx. \quad (27)$$

### 5$^{me}$ Problème.

*Réduire les limites à 0 et 1.*

*Solut.* Si dans l'intégrale proposée $\int_a^b f(x)dx$, on fait

$$x = n + mz, \; dx = mdz,$$

les limites $x = \begin{cases} b \\ a \end{cases}$, deviendront $z = \begin{cases} \frac{b-n}{m} \\ \frac{a-n}{m} \end{cases}$;

on a donc :

$$\int_a^b f(x)dx = m \int_{\frac{a-n}{m}}^{\frac{b-n}{m}} f(n+mz)dz.$$

Or en fesant $n=a$, $m=b-a$, puis en changeant $z$ en $x$, il vient :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx=(b-a)\int_0^1 \mathrm{f}[a+(b-a)x]\,dx.$$

### 6me Problème.

*Réduire les limites à 0 et $\infty$.*

*Solut.* Si dans le 2d membre de la form. (28), on pose

$$x=\frac{z}{1+z}\,,\ \text{d'où}\ z=\frac{x}{1-x}\,,$$

alors les limites $x=\begin{cases}1\\0\end{cases}$ deviendront $z=\begin{cases}\infty\\0\end{cases}$;

de plus, comme on a :

$$\mathrm{f}[a+(b-a)x]\,dx=\mathrm{f}\left(\frac{a+bz}{1+z}\right)\frac{dz}{(1+z)^2},$$

il vient, en remplaçant $z$ par $x$ :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx=(b-a)\int_0^\infty \mathrm{f}\left(\frac{a+bx}{1+x}\right)\frac{dx}{(1+x)^2}. \quad (29)$$

### 7me Problème.

*Réduire les limites en d'autres dont elles ne diffèrent qu'infiniment peu.*

*Solut.* 1° Soit $\alpha=a+da$, $\beta=b-db$, on aura d'abord :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx=\int_a^\alpha \mathrm{f}(x)dx+\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)dx+\int_\beta^b \mathrm{f}(x)dx\,;$$

puis, en ayant égard à la form. (18) :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx=(\alpha-a)\mathrm{f}[a+\varepsilon(\alpha-a)]+\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)dx$$

$$+ (b-\beta)\,\mathrm{f}[\beta+\varepsilon(b-\beta)]$$

$$= da\cdot\mathrm{f}[a+\varepsilon\, da] + \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{f}(x)dx + db\cdot\mathrm{f}[\beta+\varepsilon(b-\beta)]$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{f}(x)dx. \quad (30)$$

2° Soit $\varepsilon$ une quantité très-petite, $a=-\infty$, $b=+\infty$, on pourra écrire approximativement $b=\frac{1}{\varepsilon}$, $a=-\frac{1}{\varepsilon}$, pourvu que dans le résultat de l'intégration, on fasse $\varepsilon=0$; par là on aura :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(x)dx = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}}\mathrm{f}(x)dx. \quad (31)$$

Soit $\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}}\mathrm{f}(x)dx = \mathrm{F}(\varepsilon)$, on aura :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(x)dx = \mathrm{F}(0).$$

### 8$^{me}$ Problème.

*Étendre ou restreindre l'intervalle des limites.*

3° Lorsque la fonction sous le signe intégral renferme un facteur constant infiniment petit, ce facteur rendra, en général, la valeur de l'intégrale elle-même infiniment petite quelque soient ses limites; on pourra donc étendre celles-ci à volonté de

$$-\infty \text{ à } +\infty, \text{ ou de } -\alpha \text{ à } +\alpha.$$

*Exemple.* Soit $g$ un facteur infiniment petit, et $\int_{a}^{b}\frac{gdx}{g^2+x^2}$

l'intégrale proposée; cette intégrale étant infiniment petite pour toute valeur finie de $x$, on pourra la prendre entre deux limites quelconques $-\alpha$ et $+\alpha$, sans changer sa valeur et écrire

$$\int_a^b \frac{gdx}{g^2+x^2} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{gdx}{g^2+x^2} \quad ; \qquad (32)$$

et aussi :

$$\int_a^b \frac{gdx}{g^2+x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{gdx}{g^2+x^2} \,. \qquad (33)$$

2° Si les limites de l'intégrale sont 0 et $\infty$, ou $-\infty$ et $+\infty$, on pourra les changer respectivement en 0 et $\frac{\pi}{2}$, ou en $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, en posant $x = tgz$ : en effet, alors aux valeurs

$x = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$, $x = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, répondront respectivement les valeurs

$z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{cases}$, $z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

*Exemple.* Transformons par ce procédé l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}dx \,,$$

dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right) - \varphi\left(\frac{1-x\sqrt{-1}}{1+x\sqrt{-1}}\right)\right]\frac{l(1-x\sqrt{-1})}{1+x^2}.$$

On a : $x = tgz$, $dx = \frac{dz}{\cos^2 z}$, $e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$,

$e^{-2z\sqrt{-1}} = \frac{1-x\sqrt{-1}}{1+x\sqrt{-1}}$, $\frac{1}{1+x^2} = \cos^2 z$, $l(1-x\sqrt{-1})$

$$=l(1-tgz\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}l(1+tg^2z)-z\sqrt{-1}=\frac{z-\sqrt{-1}\,l\cos z}{\sqrt{-1}};$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\varphi(e^{2z\sqrt{-1}})-\varphi(e^{-2z\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\right]zdz. \quad (33')$$

### 9$^{me}$ Problème.

*Faire dépendre l'intégrale* $\int_0^m f(x)dx$, *de deux autres dont l'intervalle entre les limites* 0 *et* m *soit moindre.*

*Solut.* Soit $m=nq+r$, on a évidemment

$$0<q<2q \ldots <(n-1)q<nq<nq+r;$$

on a donc, par la formule (10),

$$\int_0^m f(x)dx=\int_0^{nq+r} f(x)dx=\int_0^q f(x)dx+\int_q^{2q} f(x)dx$$

$$+\int_{2q}^{3q} f(x)dx+\ldots+\int_{(n-1)q}^{nq} f(x)dx+\int_{nq}^{nq+r} f(x)dx.$$

Si dans le 1$^{er}$, 2$^e$, 3$^e$, etc., $n^e$, $n+1^e$ terme du 2$^d$ membre, on pose respectivement

$$x=z,\ x=q+z,\ x=2q+z,\ \text{etc.}\ x=\overline{n-1}\cdot q+z,$$
$$x=nq+z,$$

on obtiendra :

$$\int_0^m f(x)dx=\int_0^q f(z)dz+\int_0^q f(q+z)dz+\int_0^q f(2q+z)dz$$

$$+\ldots+\int_0^q f(\overline{n-1}\cdot q+z)dz+\int_0^r f(nq+z)dz.$$

Si nous changeons dans le 2[d] membre $z$ en $x$, il vient :

$$\int_0^m f(x)dx = \int_0^q [\,f(x) + f(q+x) + f(2q+x) +$$

$$\dots + f(\overline{n-1}\cdot q+x)]dx + \int_0^r f(nq+x)dx \qquad (34)$$

$$m = nq + r.$$

*Remarque.* On peut encore rèduire de moitié l'intervalle entre 0 et $q$. En effet, on a, par la form. (9),

$$\int_0^q \varphi(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}q} \varphi(x)dx + \int_{\frac{1}{2}q}^q \varphi(x)dx.$$

Si dans la 2[e] intégrale à droite on pose $x=q-z$, on aura :

$$\int_0^q \varphi(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}q} \varphi(x)dx - \int_{\frac{1}{2}q}^0 \varphi(q-z)dz$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}q} \varphi(x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}q} \varphi(q-x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}q} [\varphi(x) + \varphi(q-x)]dx.$$

Donc, en fesant $\varphi(x) = f(x) + f(q+x) + f(q+2x) + \dots + f(\overline{n-1}q+x)$, la form. (34) devient :

$$\int_0^m f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}q} [f(q-x) + f(x) + f(2q-x) + f(q+x) + f(3q-x)$$

$$+ f(2q+x) + \text{etc.} + f(nq-x) + f(\overline{n-1}\cdot q+x)]$$

$$+ \int_0^r f(nq+x)dx. \qquad (35)$$

### 10[me] Problème.

*Transformer l'intégrale* $\int_{-m}^m f(x)dx.$

*Solut.* On a, par (9) :

$$\int_{-m}^{m} f(x)dx = \int_{-m}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{m} f(x)dx ;$$

donc, à cause de (24)

$$\int_{-m}^{m} f(x)dx = \int_{0}^{m} f(-x)dx + \int_{0}^{m} f(x)dx = \int_{0}^{m} [f(-x)+f(x)]dx. \quad (36)$$

Si $f(-x)=f(x)$, on a : $\int_{-m}^{m} f(x)dx = 2\int_{0}^{m} f(x)dx \quad (36')$

Si $f(-x)=-f(x)$, on a : $\int_{-m}^{m} f(x)dx = 0. \quad (36'')$

### 11me Problème.

*Transformer l'intégrale multiple*

$$\int_0^x \int_0^y \ldots \varphi(x, y, \ldots) dxdy \ldots, \quad (\alpha)$$

*dont les limites sont assujetties à l'équation de condition :*

$$k > f(x, y, \ldots) > l,$$

*en une autre, dans laquelle les limites soient constantes.*

*Solut.* Soit P un facteur qui se réduise à l'unité lorsqu'on a :

$$k > f(x, y, \ldots) > l,$$

et qui soit nul, pour les valeurs de $x$, $y$, etc., qui ne sont pas comprises entre $k$ et $l$, ou qui satisfont, à l'une ou l'autre des relations :

$$k > l > f(x, y, \ldots), \quad f(x, y, \ldots) > k > l,$$

il est clair qu'on pourra multiplier $(\alpha)$ par ce facteur, et étendre toutes les limites des intégrales de zéro à l'infini ; ce qui donnera :

$$\int_0^x \int_0^y \ldots \varphi(x, y, \ldots) dxdy \ldots$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \varphi(x, y, \ldots) dxdy \ldots \times P. \quad (37''')$$

*Remar.* La quantité P se nomme, d'après Lejeune-Dorichlet, auteur de cette transformation, le *facteur de discontinuité.* On en fait un grand usage dans la réduction des intégrales multiples.

## III.

## PASSAGE DES INTÉGRALES INDÉFINIES, EN DÉFINIES.

—

### Problème.

*Étant donné* $\int f(x)dx = F(x) + c$, *trouver* $\int_a^b f(x)dx$.

*Solut.* 1er *cas.* $F(x)$ est continu, pour toutes les valeurs de $x$ depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$.

En supposant $b-a=nda$, on aura :

$$\int_a^b f(x)dx = da[f(a) + f(a+da) + f(a+2da) + \\ \dots + f(a+\overline{n-1}\,da)];$$

mais à cause de $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, cette égalité devient :

$$\int_a^b f(x)dx = da\left[\frac{dF(a)}{da} + \frac{dF(a+da)}{da} + \frac{dF(a+2da)}{da} + \\ \dots + \frac{dF(a+\overline{n-1}\,da)}{da}\right] = dF(a) + dF(a+da) + \\ dF(a+2da) + \dots + dF(a+\overline{n-1}\,da). \quad (\alpha)$$

Mais on a d'un autre côté :

$$F(a+da) = F(a) + dF(a),$$
$$F(a+2da) = F(a+da) + dF(a+da) = F(a) + dF(a) \\ + dF(a+da),$$

$$F(a+3da)=F(a+2da)+dF(a+2da)=F(a)+dF(a)+dF(a+da)+dF(a+2da);$$

donc en général :

$$F(a+nda)=F(b)=F(a)+dF(a)+dF(a+da)+\dots+dF(a+\overline{n-1}\,da);$$

par là ($\alpha$) devient :

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \quad (37)$$

$2^{me}$ *cas.* $F(x)$ est discontinu au point $x=\alpha$, $\alpha$ étant compris entre $a$ et $b$.

Soit, dans ce cas,

$$D=F(\alpha+d\alpha)-F(\alpha-d\alpha); \quad (38)$$

alors on aura :

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)-D. \quad (39)$$

*Démonst.* On a par la form. (11)

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\alpha-d\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha+d\alpha}^b f(x)dx;$$

donc, à cause de (37), applicable à chacune des intégrales du $2^d$ membre, on a :

$$\int_a^b f(x)dx=F(\alpha-d\alpha)-F(a)+F(b)-F(\alpha+d\alpha)$$

$$=F(b)-F(a)-[F(\alpha+d\alpha)-F(\alpha-d\alpha)]$$

$$=F(b)-F(a)-D.$$

Il faut donc retrancher du résultat obtenu par la règle qu'implique la formule (37), la correction D. Cette correction n'est rien autre que l'intégrale singulière

$$D=\int_{\alpha-d\alpha}^{\alpha+d\alpha} f(x)dx. \quad (39')$$

Il y a donc 2 règles pour la conversion des intégrales indéfinies en définies.

1$^{re}$ *Règle.* Si F$(x)$ est une fonction finie et continue pour toutes les valeurs de $x$, depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$, il suffit de remplacer, dans l'intégrale donnée, $x$ successivement par $b$ et par $a$, et retrancher le second résultat du 1$^{er}$.

2$^{me}$ *Règle.* Si la fonction F$(x)$ est discontinue (infinie, ou indéterminée), pour un point $x=\alpha$, situé entre $a$ et $b$, on suivra d'abord la règle précédente, puis on retranchera du résultat la correction

$$\mathrm{D}=\mathrm{F}(\alpha+d\alpha)-\mathrm{F}(\alpha-d\alpha).$$

1$^{re}$ *Remarque.* Si la fonction F$(x)$ devient discontinue au point $x=a$, on aura :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx=\int_a^{a+da}\mathrm{f}(x)dx+\int_{a+da}^b \mathrm{f}(x)dx,$$

d'où :

$$\int_{a+da}^b \mathrm{f}(x)dx=\int_a^b \mathrm{f}(x)dx-\int_a^{a+da}\mathrm{f}(x)dx$$

$$=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)-[\mathrm{F}(a+da)-\mathrm{F}(a)]$$

$$=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a+da).\quad(40)$$

2$^{me}$ *Remarque.* Si F$(x)$ devient discontinue au point $x=b$, alors elle restera continue depuis $x=a$, jusqu'à $x=b-db$, il faudra donc évaluer l'intégrale pooposée pour ce dernier intervalle. Pour cela, on a :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx=\int_a^{b-db}\mathrm{f}(x)dx+\int_{b-db}^b \mathrm{f}(x)dx,$$

d'où :

$$\int_a^{b-db}\mathrm{f}(x)dx=\int_a^b \mathrm{f}(x)dx-\int_{b-db}^b \mathrm{f}(x)dx$$

$$=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)-[\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(b-db)]$$

$$=\mathrm{F}(b-db)-\mathrm{F}(a).\quad(41)$$

3$^{me}$ *Remarque.* La valeur de D, form. (39′), est nulle, lorsque f$(\alpha)$ est finie, et dans ce cas (39) se réduit à (37).

## Diverses Applications.

1[er] *Exemple.* Chercher la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^{4}\frac{dx}{x}$.

On a $\int\frac{dx}{x}=lx+c$, et par suite $F(x)=lx$.

Mais on a $l(x)=-\infty$, pour $x=0$, donc $F(x)$ est discontinue au point $x=0$, situé entre les limites $-2$ et $4$; il faut donc appliquer la 2[de] règle, savoir :

$$\int_{-2}^{4}\frac{dx}{x}=l(4)-l(-2)-D.$$

Or, on a : $D=l(0+d\alpha)-l(0-d\alpha)$

$$=l(d\alpha)-l(-d\alpha)$$
$$=l(d\alpha)-l(d\alpha)-l(-1)$$
$$=-l(-1);$$

donc : $\int_{-2}^{4}\frac{dx}{x}=l(4)-l(-2)+l(-1)$

$$=l(4)-[l(-2)-l(-1)]$$
$$=l(4)-l\frac{-2}{-1}=l(4)-l(2),\ \text{valeur réelle.}$$

Si on avait opéré suivant la 1[re] Règle on aurait trouvé le résultat imaginaire

$$\int_{-2}^{4}\frac{dx}{x}=l(4)-l(-2).$$

2[me] *Exemple.* Chercher la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}.$$

On a :

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx}{1+\frac{1}{\cos^2 x}} = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{1+\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2}.$$

Mais on a :

$$\int \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{1+\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2} = \text{arc } tg \frac{1}{\cos x} + \text{C}.$$

On a donc ici $F(x) = \text{arc } tg \left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

Pour $x = 0$, on a $F(x) = F(0) = \text{arc } tg \frac{1}{\cos 0} = \text{arc } tg\ 1 = \frac{\pi}{4}$,

» $x = \frac{\pi}{2} - d\alpha$, on a $F(x) = \text{arc } tg \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - d\alpha\right)}$

$$= \text{arc } tg \frac{1}{\sin d\alpha} = \text{arc } tg \frac{1}{d\alpha} = \text{arc } tg \frac{1}{0} = +\frac{\pi}{2},$$

Pour $x = \frac{\pi}{2} + d\alpha$, on a $F(x) = \text{arc } tg \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + d\alpha\right)}$

$$= \text{arc } tg \frac{1}{-\sin d\alpha} = \text{arc } tg \frac{1}{-d\alpha} = \text{arc } tg \left(-\frac{1}{0}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

Pour $x = \frac{3\pi}{4}$, on a $F(x) = \text{arc } tg \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{4}} = \text{arc } tg \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

$$= -\text{arc } tg \sqrt{2}.$$

L'on voit que la fonction $F(x)$ passe subitement de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$

pour $x = \frac{\pi}{2} - d\alpha$, $x = \frac{\pi}{2} + d\alpha$ ; il y a donc solution de continuité au point $x = \frac{\pi}{2}$, il faut par conséquent faire le calcul suivant la 2[de] règle, ce qui donne :

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} = F(\frac{3\pi}{4}) - F(0) - D.$$

$$= - \text{arc } tg \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - D.$$

Et comme on a : $D = F(\frac{\pi}{2} + d\alpha) - F(\frac{\pi}{2} - d\alpha)$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi, \text{ il vient}$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{3\pi}{4} - \text{arc } tg \sqrt{2};$$

résultat positif, comme cela doit être, car tous les éléments sont positifs (théor. 3[e]). Si on avait opéré suivant la 1[re] règle, on aurait trouvé

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} = - \text{arc } tg \sqrt{2} - \frac{\pi}{4};$$

résultat négatif, et par suite absurde, puisque (théor. 3[e]), la fonction sous le signe $\int$ reste positive depuis $x = 0$, jusqu'à $x = \frac{3\pi}{4}$.

3[me] *Exemple.* Chercher la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{adx}{x^2 - a^2}$.

On a $\int \frac{adx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2} l \left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$; donc $F(x) = \frac{1}{2} l \left(\frac{x-a}{x+a}\right)$,

devient $-\infty$ pour $x = a$; on a donc, par la 2[me] règle :

$$\int_0^\infty \frac{adx}{x^2 - a^2} = F(\infty) - F(0) - D.$$

Par la formule (31) on a :

$$\int_0^\infty \frac{adx}{x^2 - a^2} = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{adx}{x^2 - a^2} = F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - F(0) - D;$$

or, pour $x = 0$, on a $F(0) = \frac{1}{2} l \left(\frac{-a}{a}\right) = {}^1 l(-1)$,

» $x = a - da$, on a $F(a - da) = \frac{1}{2} l \frac{-da}{2a - da}$,

» $x = a + da$, on a $F(a + da) = \frac{1}{2} l \frac{da}{2a + da}$,

» $x = \frac{1}{\varepsilon}$, ou a $F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2} l \left(\frac{\frac{1}{\varepsilon} - a}{\frac{1}{\varepsilon} + a}\right) = \frac{1}{2} l \left(\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{s}}\right)$

$$= \frac{1}{2} l(1) = 0;$$

d'où : $D = \frac{1}{2} l\left(\frac{da}{2a + da}\right) - \frac{1}{2} l\left(\frac{-da}{2a - da}\right) = \frac{1}{2} l\left(\frac{da}{2a}\right) - {}^1 l\left(\frac{-da}{2a}\right)$

$$= -\frac{1}{2} l(-1).$$

On a donc :

$$\int_0^\infty \frac{adx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{2} l(-1) + \frac{1}{2} l(-1) = 0.$$

Par la 1[re] règle on aurait trouvé le résultat imaginaire :

$$\int_0^\infty \frac{adx}{x^2-a^2} = -\tfrac{1}{2}\,l(-1).$$

## IV.

## RÈGLES POUR LA DIFFÉRENTIATION DES INTÉGRALES DÉFINIES,

### PAR RAPPORT A UNE CONSTANTE.

Chacune des 3 quantités $a$, $b$, $x$, qui entrent dans la composition de l'intégrale $\int_a^b \mathrm{f}(x)dx$, peuvent être considérées comme des fonctions d'une constante $r$, et on demande la dérivée de l'intégrale par rapport à cette lettre. Pour cela nous distinguerons plusieurs cas :

1° $a$ seul est fonction de $r$;

2° $b$ » » »

3° $x$ » » »

4° $a$, $b$, $x$, sont en même temps des fonctions de $r$.

### 1er Problème.

*Trouver la dérivée de* $\int_a^b \mathrm{f(x)dx}$ *par rapport à* r, *en supposant que* a *seul soit fonction de* r.

*Solution.* Comme $a$ est fonction de $r$, il suit de la formule (8), que l'intégrale proposée est aussi fonction de $r$, et que si $r$ devient $r+dr$, $a$ se changera en $a+da$.

Soit donc $$\varphi(r) = \int_a^b \mathrm{f}(x)dx;$$

d'où :
$$\varphi(r+dr)=\int_{a+da}^{b}\mathrm{f}(x)dx.$$

donc en retranchant :

$$\varphi(r+dr)-\varphi(r)=d\varphi(r)=\int_{a+da}^{b}\mathrm{f}(x)dx-\int_{a}^{b}\mathrm{f}(x)dx.$$

Mais on a aussi :

$$\int_{a}^{b}\mathrm{f}(x)dx=\int_{a}^{a+da}\mathrm{f}(x)dx+\int_{a+da}^{b}\mathrm{f}(x)dx;$$

donc, en substituant :

$$d\varphi(r)=-\int_{a}^{a+da}\mathrm{f}(x)dx,$$

ou, à cause de la formule (18),

$$\begin{aligned}d\varphi(r)&=-(a+da-a)\mathrm{f}[a+\varepsilon(a+da-a)]\\&=-da\mathrm{f}(a).\end{aligned}$$

Donc, en divisant par $dr$ :

$$\frac{d\varphi(r)}{dr}=\frac{d\int_{a}^{b}\mathrm{f}(x)dx}{dr}=-\frac{da}{dr}\mathrm{f}(a).\quad(42).$$

2me Problème.

b *étant seul fonction de* r, *trouver la dérivée de* $\int_{a}^{b}\mathrm{f}(x)dx$ *par rapport à* r.

*Solution.* On a, par la formule (22),

$$\int_{a}^{b}\mathrm{f}(x)dx=-\int_{b}^{a}\mathrm{f}(x)dx;$$

d'où, en différentiant :

$$\frac{d\int_a^b \mathrm{f}(x)dx}{dr} = -\frac{d\int_b^a \mathrm{f}(x)dx}{dr};$$

donc, en appliquant au 2[d] membre la règle donnée par la formule (42), on a :

$$\frac{d\int_a^b \mathrm{f}(x)dx}{dr} = \mathrm{f}(b) \cdot \frac{db}{dr}. \quad (43)$$

*Remarque.* Soit $u = \int_a^b \mathrm{f}(x)dx$, on a par les form. (42), (43):

$$\frac{du}{da} = -\mathrm{f}(a), \quad \frac{du}{db} = \mathrm{f}(b). \quad (44)$$

En effet, à cause de (42), on a :

$\frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{da} = -\mathrm{f}(a)$ ; et à cause de (43), $\frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{db} = \mathrm{f}(b)$.

### 3[me] Problème.

f(x) *renfermant seul la constante* r, *ce que nous indiquerons en écrivant* f(x, r), *on demande la dérivée par rapport à* r *de l'intégrale* $\int_a^b \mathrm{f}(\mathrm{r},\mathrm{x})\mathrm{dx}$.

*Solution.* Soit $\varphi(r) = \int_a^b \mathrm{f}(r, x)dx$, d'où :

$$\varphi(r+dr) = \int_a^b \mathrm{f}(r+dr, x)dx.$$

En développant $\mathrm{f}(r+dr, x)$ par le théorème de Taylor, on a :

$$\varphi(r+dr) = \int_a^b \mathrm{f}(r, x)dx + dr \int_a^b \mathrm{f}'(r,x)dx$$

$$+\frac{dr^2}{1\cdot 2}\int_a^b f''(r, x)dx + \text{etc.}$$

d'où l'on tire, en retranchant $\varphi(r) = \int_a^b f(r, x)dx$ :

$$\frac{\varphi(r+dr)-\varphi(r)}{dr} = \frac{d\varphi(r)}{dr}$$

$$= \int_a^b f'(r, x)dx + \frac{dr}{1\cdot 2}\int_a^b f''(r, x)dx + \text{etc.}$$

Donc, si $\int_a^b f''(r, x)dx$ n'est pas égal à $\frac{1}{0}$, cas auquel le second terme serait indéterminé, car il donnerait $dr \times \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$, on peut omettre tous les termes du 2[d] membre, à partir du deuxième, ce qui conduit à :

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = \int_a^b f'(r, x)dx,$$

ou,

$$\frac{d\int_a^b f(r, x)dx}{dr} = \int_a^b \frac{df(r,x)}{dr}\, dx. \quad (45)$$

### 4[me] Problème.

*En supposant que* a, b, *et* f(x) *dépendent à la fois de la constante* r, *trouver la dérivée par rapport à* r *de l'intégrale* $\int_a^b f(r, x)dx$.

*Solution.* Soit $u = \int_a^b f(r, x)dx$ ; $u$ sera une fonction des trois

variables $a, b, r$ et l'on aura :

$$\frac{du}{dr} = \left(\frac{du}{dr}\right) + \left(\frac{du}{da}\right)\frac{da}{dr} + \left(\frac{du}{db}\right)\frac{db}{dr}. \quad (\beta)$$

Mais on a, par les formules (45), (44) :

$$\left(\frac{du}{dr}\right) = \int_a^b \frac{d\,\mathrm{f}(r,x)}{dr}\,dx\,, \quad \left(\frac{du}{da}\right) = -\,\mathrm{f}(a,r),$$

$$\left(\frac{du}{db}\right) = \mathrm{f}(b,r)\,;$$

en substituant ces valeurs dans $(\beta)$, il vient :

$$\frac{d\int_a^b \mathrm{f}(r,x)dx}{dr} = -\,\mathrm{f}(a,r)\frac{da}{dr} + \mathrm{f}(b,r)\frac{db}{dr} + \int_a^b \frac{d\,\mathrm{f}(r,x)}{dr}dx. \quad (46)$$

## V.

## TRANSFORMATIONS REMARQUABLES DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Les intégrales définies peuvent être transformées de trois manières différentes; par l'introduction d'une nouvelle variable; par la décomposition de l'intégrale en une somme de plusieurs autres; et en troisième lieu, en différentiant et en intégrant par rapport à une constante. Nous allons donner quelques transformations remarquables obtenues par ces divers procédés.

### 1re Transformation.

Cette transformation s'opère lorsque dans l'intégrale

$$\int_a^b \mathrm{f}(\varphi x)dx$$

on fait $\varphi(x) = z$, d'où $x = \psi(z)$; car alors on obtient $dx = \psi(z)dz$, et à la place des limites

$x = \begin{cases} b \\ a \end{cases}$, les suivantes : $z = \begin{cases} \varphi(b) \\ \varphi(a) \end{cases}$ ; donc

$$\int_a^b f(\varphi x)dx = \int_{\varphi a}^{\varphi b} f(z)\psi'(z)dz = \int_{\varphi a}^{\varphi b} f(x)\psi'(x)dx.$$

Cette formule contient le procédé général, que nous appliquerons à la démonstration des théorèmes suivants :

### 1er Théorème.

a *et* c *étant des nombres réels, je dis que l'on a :*

$$\int_0^\infty \varphi[cx + \frac{a}{x}] \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^\infty \varphi[2\sqrt{ac} + x] \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad (47)$$

*Démonstration.* Posons, dans l'intégrale $\int_0^\infty f(\gamma z - \frac{\alpha}{z})^2 dz$, $(\alpha)$,

$(\beta)$ $\gamma z - \alpha = y$, alors aux limites $z = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$, répondent $y = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$,
et l'on aura :

$\gamma^2 z^2 + \frac{\alpha^2}{z^2} - 2\alpha\gamma = y^2$ $(\gamma)$. En ajoutant $4\alpha\gamma = 4\alpha\gamma$, on a :

$\gamma^2 z^2 + \frac{\alpha^2}{z^2} + 2\alpha\gamma = y^2 + 4\alpha\gamma$, par suite : $\gamma z + \frac{\alpha}{z} = \sqrt{y^2 + 4\alpha\gamma}$. $(\delta)$

On a aussi :

$$dy = (\gamma + \frac{\alpha}{z^2})dz = \frac{1}{z}(\gamma z + \frac{\alpha}{z})dz; \text{ donc}$$

$$ydy = \frac{1}{z}(\gamma z + \frac{\alpha}{z})(\gamma z - \frac{\alpha}{z})dz, \text{ et par suite :}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{4\alpha\gamma + y^2}} = \frac{1}{z}(\gamma z - \frac{\alpha}{z})dz = (\gamma - \frac{\alpha}{z^2})dz; \text{ donc}$$

$$dy + \frac{ydy}{\sqrt{4\alpha\gamma + y^2}} = 2\gamma dz; \text{ d'où l'on tire } dz =$$

$$\frac{1}{2\gamma}\left[1+\frac{y}{\sqrt{4\alpha\gamma+y^2}}\right]dy. \quad (\varepsilon)$$

A cause des formules ($\beta$) et ($\varepsilon$), l'intégrale ($\alpha$) devient :

$$\int_0^\infty f(\gamma z-\frac{\alpha}{z})^2 dz=\frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^\infty f(y^2)\left[1+\frac{y}{\sqrt{4\alpha\gamma+y^2}}\right]dy$$

$$=\frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^\infty f(y^2)dy+\frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^\infty\frac{f(y^2)ydy}{\sqrt{4\alpha\gamma+y^2}}$$

$$\int_0^\infty f(\gamma z-\frac{\alpha}{z})^2 dz=\frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^0 f(y^2)dy+\frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty f(y^2)dy$$

$$+\frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^0\frac{yf(y^2)dy}{\sqrt{4\alpha\gamma+y^2}}+\frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty\frac{yf(y^2)dy}{\sqrt{4\alpha\gamma+y^2}}=\frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty f(y^2)dy$$

$$+\frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty f(y^2)dy-\frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty\frac{yf(y^2)dy}{\sqrt{4\alpha\gamma+y^2}}+\frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty\frac{yf(y^2)dy}{\sqrt{4\alpha\gamma+y^2}}$$

$$=\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty f(y)dy.$$

Donc, en développant le carré du 1[er] membre :

$$\int_0^\infty f(\gamma^2z^2+\frac{\alpha^2}{z^2}-2\alpha\gamma)dz=\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty f(y^2)dy.$$

Soit $\qquad f(\gamma^2z^2+\frac{\alpha^2}{z^2}-2\alpha\gamma)=\varphi(\gamma^2z^2+\frac{\alpha^2}{z^2}),$

ou $\qquad f(y^2)=\varphi(y^2+2\alpha\gamma),$

à cause de $\qquad \gamma^2z^2+\frac{\alpha^2}{z^2}=y^2+2\alpha\gamma;$

par là l'égalité précédente devient :

$$\int_0^\infty \varphi[\gamma^2 z^2 + \frac{\alpha^2}{z^2}]dz = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \varphi[y^2 + 2\alpha\gamma]dy = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \varphi[z^2 + 2\alpha\gamma]dz.$$

Soient, $z^2 = x$, $\gamma^2 = c$, $\alpha^2 = a$, $dz = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, on trouve enfin :

$$\int_0^\infty \varphi[cx + \frac{a}{x}]\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty [a + 2\sqrt{ac}]\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

*Exemple.* $$\int_0^\infty \frac{1}{[cx + \frac{a}{x}]^u}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{1}{(x + 2\sqrt{ac})^u}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

### 2me Théorème.

a *et* b *étant des nombres réels, je dis que l'on a :*

$$\int_{-\infty}^\infty f(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a})dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^\infty f(x^2)dx, \quad (48)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2})dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^\infty f(x^2)dx, \quad (49)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2})\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{b}}\int_{-\infty}^\infty f(x^2)dx. \quad (50)$$

*Démonstration.* 1° Posons $z = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$, il vient :

$$\int_{-\infty}^\infty f(z^2)dz = \sqrt{a}\int_{-\infty}^\infty f(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a})dx;$$

donc en changeant $z$ en $x$,

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a})dx.$$

C'est la formule (48).

2° Si nous posons dans l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(z^2)dz$,

$$z = x\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{x},$$

on aura : $dz = \sqrt{a}\cdot dx + \frac{\sqrt{b}\cdot dx}{x^2}$ ; de plus aux limites $z = \begin{cases}\infty \\ -\infty\end{cases}$, répondront les limites $x = \begin{cases}\infty \\ 0\end{cases}$ ; on a donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z^2)dz = \int_0^{\infty} f[ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2}]\,[\sqrt{a} + \frac{\sqrt{b}}{x^2}]dx$$

$$= \sqrt{a}\int_0^{\infty} f[ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2}]dx +$$

$$\sqrt{b}\int_0^{\infty} [ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b^2}{x^2}]\frac{dx}{x^2}. \quad (\alpha)$$

Fesons dans la 2$^{me}$ intégrale à droite,

$x = \frac{\sqrt{b}}{y\sqrt{a}}$, alors les limites $x = \begin{cases}\infty \\ 0\end{cases}$ deviennent $y = \begin{cases}0 \\ \infty\end{cases}$,

et on aura :

$$dx = -\frac{\sqrt{ab}\cdot dy}{ay^2},\ ax^2 = \frac{b}{y^2},\ \ \frac{dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{a}\cdot dy}{\sqrt{b}}.$$

Donc, l'intégrale ci-dessus devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z^2)dz = \sqrt{a}\int_0^{\infty} f[ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2}]dx -$$

$$-\sqrt{b}\int_{0}^{\infty} \mathrm{f}[\frac{b}{y^2} - 2\sqrt{ab} + ay^2]\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,dy\,,$$

$$=\sqrt{a}\int_{0}^{\infty} \mathrm{f}[ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2}]dx + \sqrt{a}\int_{0}^{\infty} \mathrm{f}[ax^2 - 2\sqrt{ab}$$

$$+\frac{b}{x^2}]dx = 2\sqrt{a}\int_{0}^{\infty} \mathrm{f}[ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2}]dx.$$

Donc, à cause de la formule (36′) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x^2)dx\,\sqrt{a}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}[ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2}]dx.$$

C'est la formule (49′).

3° Posons dans la 1[re] intégrale à droite de la formule ($\alpha$),

$x = \dfrac{\sqrt{b}}{y\sqrt{a}}$, on trouvera, pour la valeur de cette intégrale :

$$\sqrt{a}\int_{0}^{\infty} \mathrm{f}[ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2}]dx = \sqrt{b}\int_{0}^{\infty} \mathrm{f}[ay^2 - 2\sqrt{ab}$$

$+\dfrac{b}{y^2}]\,\dfrac{dy}{y^2}$, et alors la formule ($\alpha$), donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(z^2)dz = 2\sqrt{b}\int_{0}^{\infty} \mathrm{f}[ax^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x^2}]\,\frac{dx}{x^2}\;;$$

donc, à cause de (36′) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x^2)dx = \sqrt{b}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}[ax^2 - \sqrt{ab} + \frac{b}{x^2}]\,\frac{dx}{x^2}.$$

C'est la formule (50).

*Remarque.* On déduit aisément des formules (48), (49), (50), les suivantes comme cas particuliers.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}[x^2+2mx+m^2]dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x^2)dx\,, \quad (51)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}[x^2-m+\frac{m^2}{4x^2}]dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x^2)dx\,, \quad (52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}[x^2-m+\frac{m^2}{4x^2}]\,\frac{dx}{x^2} = \frac{2}{m}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x^2)dx\,, \quad (53).$$

$$\int_{0}^{\infty} \tfrac{1}{2}[\mathrm{f}(x^2-2mx+m^2)+\mathrm{f}(x^2+2mx+m^2)]dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x^2)dx = \int_{0}^{\infty} \mathrm{f}(x^2)dx. \quad (53')$$

Ajoutons encore quelques exemples de transformations usuelles plus simples, dont nous aurons besoin dans la suite.

1^er^ Exemple. *Transformer en expression trigonométrique l'intégrale définie :*

$$\int_{0}^{1} \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A cet effet, soit $z = \arcsin x$; on aura : $dz = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\sin z = x$; donc, pour $x = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, on a $z = \begin{cases}\frac{\pi}{2}\\0\end{cases}$; donc, en substituant, il vient :

$$\int_{0}^{1} \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m z\, dz. \quad (53')$$

2^me^ Exemple. $l$ *étant la marque des logarithmes Népériens, transformer l'intégrale*

$$\int_0^1 dx\,(l\frac{1}{x})^{\mu-1},$$

*à fonction logarithmique, en une autre à fonction exponentielle.*

Pour cela, fesons $l\frac{1}{x}=z$, $\frac{1}{x}=e^z$, $dx=-e^{-z}dz$; alors pour $x=\begin{cases}1\\0\end{cases}$, on aura $z=\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$, $dx(l\frac{1}{x})^{\mu-1}=-z^{\mu-1}e^{-z}dz$;

$$\int_0^1 dx(l\frac{1}{x})^{\mu-1}=-\int_\infty^0 z^{\mu-1}e^{-z}dz$$

$$=\int_0^\infty z^{\mu-1}e^{-z}dz=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx.$$

C'est cette transcendante que Legendre nomme fonction eulérienne de la 2^de^ espèce, ou fonction gamma, parce qu'il pose pour abréger,

$$\int_0^1 dx(l\frac{1}{x})^{\mu-1}=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx=\Gamma(\mu). \quad (53'')$$

3^me^ Exemple. *Transformer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \quad (\alpha)$$

*en une autre dans laquelle* $x^n$ *soit réduit à la* 1^re^ *puissance.*

Soit $x^n=z$, $nx^{n-1}dx=dz$, $x=z^{\frac{1}{n}}$, les limites ne changeront pas et l'on aura :

$$x^{p-1}dx=\frac{1}{n}z^{\frac{p}{n}-1}dz,\ \sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}=(1-z)^{1-\frac{q}{n}};$$

par conséquent :

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{1}{n}\int_0^1 z^{\frac{p}{n}-1} dz(1-z)^{\frac{q}{n}-1} \ . \ . \quad (53''')$$

Legendre nomme la transcendante (α), fonction eulérienne de la 1[re] espèce, et la désigne pour abréger par

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = (\frac{p}{q}). \quad (53^{\text{IV}})$$

Donc, si l'on pose avec Legendre

$$\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} = (p,q),$$

$p$ et $q$ étant des nombres positifs, on aura, par la formule (53''')

$$(\frac{p}{q}) = \frac{1}{n}(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}). \quad (53^{\text{V}})$$

4[me] Exemple. *Transformer la transcendante* $\int_0^x \frac{dx}{lx}$, *dans laquelle* l *désigne un logarithme Népérien, en une autre à fonction exponentielle.*

Soit $x = e^z$, $dx = e^z dz$, $lx = z$, $\frac{dx}{lx} = \frac{e^z dz}{z}$; alors

$$x = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ donne } z = \begin{cases} z \\ -\infty \end{cases}, \text{ on a par conséquent :}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{lx} = \int_{-\infty}^z \frac{e^z dz}{z} = \int_{-\infty}^x \frac{e^x dx}{x}.$$

Mais on a :

$$\int \frac{dx}{lx} = \int \frac{e^x dx}{x} = lx + c + x + \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

Euler, dans ses institutions de calcul différentiel, a déter-

miné la constante $c$, de manière à ce que l'intégrale puisse être prise à partir de zéro, et il a trouvé

$$c = 0,577215664901\ldots \quad (53^{\text{vi}})$$

Si l'on désigne l'intégrale pour cette valeur de $c$ pour abréger par $li(x)$, on aura :

$$li(x) = \int_0^x \frac{dx}{lx} = lx + 0,577215\ldots + x + \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.} \quad (53^{\text{vii}})$$

La transcendante $\int_0^x \frac{dx}{lx}$, désignée par $li\cdot x$, se nomme le *logarithme intégral* de $x$.

### 2$^{\text{me}}$ Transformation.

Les généralités qui se rapportent à cette transformation ont déjà été données, et se trouvent consignées dans les formules (34), (35), (36), auxquelles nous renvoyons ici.

### 3$^{\text{me}}$ Transformation.

Cette transformation consiste à différencier une ou plusieurs fois de suite l'intégrale proposée par rapport à une constante, puis à intégrer le résultat entre certaines limites. Soit, en effet

$$u = \int_a^b \mathrm{f}(x,r)dx\,;$$

en supposant que $a$ et $b$ soient indépendants de la constante $r$, on aura par la formule (45).

$$\frac{du}{dr} = \int_a^b \frac{d\mathrm{f}(x,r)}{dr}\,dx.$$

Il se peut maintenant que cette nouvelle intégrale puisse s'ob-

tenir facilement ; en désignant par $\varphi(r)$ sa valeur, on aura :

$$\frac{du}{dr} = \varphi(r),$$

d'où :

$$u = \int \varphi(r) dr + \mathrm{C}; \quad (54)$$

et il n'y aura plus que la constante C à déterminer.

Si l'intégrale $u$ ne contenait pas de constante par rapport à laquelle on puisse différentier, on en introduirait une à volonté, puis on appliquerait le procédé précédent. Donnons d'abord un exemple simple de cette méthode.

On demande de transformer l'intégrale

$$u = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} tgrx}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (\alpha)$$

En différentiant par rapport à $r$, et considérant que

$$d\left(\frac{\operatorname{arc} tgaz}{a}\right) = \frac{dz}{1+a^2z^2},$$

on a :

$$\frac{du}{dr} = \int_0^1 \frac{1}{1+r^2x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (\beta)$$

Mais en posant $x = \sin z$, $dx = \cos z dz$, $\cos z = \sqrt{1-x^2}$, les limites $x = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, deviendront $z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{cases}$, et par suite l'intégrale $(\beta)$ se change en

$$\frac{du}{dr} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1+r^2\sin^2 z}. \quad (\gamma)$$

Mais en posant $r^2 = \beta^2 - 1$, ou $\beta = \sqrt{1+r^2}$, on a :

$$\int \frac{dz}{1+r^2\sin^2 z} = \int \frac{dz}{1+(\beta^2-1)\sin^2 z} = \int \frac{dz}{1-\sin^2 z+\beta^2\sin^2 z}$$

$$= \int \frac{dz}{\cos^2 z + \beta^2 \sin^2 z} = \int \frac{\frac{dz}{\cos^2 z}}{1+\beta^2 \operatorname{tg}^2 z} = \int \frac{d(\operatorname{tg} z)}{1+\beta^2 \operatorname{tg}^2 z}$$

$$= \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} (\beta \operatorname{tg} z) + c.$$

En prenant cette intégrale entre les limites $z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{cases}$, conformément à la règle de la formule (37), on aura :

$$\frac{du}{dr} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1+r^2 \sin^2 z} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \left(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} (\beta \operatorname{tg} 0)$$

$$= \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+r^2}};$$

d'où l'on tire :

$$u = \frac{\pi}{2} \int \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} + c. \quad (\delta)$$

Mais en développant $u = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} rx}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, d'après la formule (8), on s'assurera que pour $r = 0$, tous les termes de ce développement disparaissent, et que l'on a $u = 0$. Donc l'intégrale ($\delta$), prise entre les limites $r = 0$, $r = r$, sera :

$$u = \frac{\pi}{2} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}};$$

on a donc enfin :

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} rx}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Nous allons donner maintenant quelques transformations remarquables qui se rapportent à l'espèce de celles dont nous nous occupons ici.

### Lemme.

*Si la fonction* $\psi(x)$, *ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre* $n-1$ *inclusivement, s'évanouissent pour* $x=a$, $x=b$, *on a :*

$$\int_a^b \psi(x)\varphi^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_a^b \psi^{(n)}(x)\varphi(x)dx.$$

*Démonstration.* En effet on a, en intégrant par partie :

$$\int \psi(x)\varphi^{(n)}(x)dx = \psi(x)\varphi^{(n-1)}(x) - \int \psi'(x)dx\varphi^{(n-1)}(x)dx,$$

$$\int \psi'(x)dx\varphi^{(n-1)}(x)dx = \psi'(x)\varphi^{(n-2)}(x) - \int \psi''(x)dx\varphi^{(n-2)}(x)dx,$$

etc. etc.

$$\int \psi^{(n-1)}(x)dx\varphi'(x)dx = \psi^{(n-1)}(x)\varphi(x) - \int \psi^{(n)}(x)dx\varphi(x).$$

On en tire, par substitution :

$$\int \psi(x)\varphi^{(n)}(x)dx = \psi(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \psi'(x)\varphi^{(n-2)}(x) + \ldots + (-1)^{n-1}\psi^{(n-1)}(x)\varphi(x) + (-1)^n \int \psi^{(n)}(x)dx\cdot\varphi(x).$$

D'où :

$$\int_a^b \psi(x)\varphi^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_a^b \psi^{(n)}(x)dx\cdot\varphi(x). \qquad (55)$$

### 1er Théorème.

*Si* $f(\cos t)$ *est une fonction réelle quelconque de* $\cos t$, *on a :*

$$\int_0^\pi f(\cos t)\cos nt\, dt = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\,(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos t)\sin^{2n} t\, dt. \qquad (56).$$

*Démonstration.* Soit $\psi(x) = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$; cette fonction, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, disparaissent pour $x=1$, $x=-1$, on a donc par la formule (55) :

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \varphi^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n} \varphi(x)dx.$$

Mais on a, par une formule différentielle connue :

$$\frac{dx^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n} \sin (n \arccos x);$$

par suite, l'égalité précédente devient :

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \varphi^{(n)}(x)dx =$$

$$-\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n} \int_{-1}^{1} \frac{d \sin (n \arccos x)}{dx} \varphi(x)dx. \quad (\alpha)$$

Posons $x = \cos t$, alors les limites $x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$, deviennent $t = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$;

de plus on aura :

$$dx = \sin t\,dt,\ \sin t = (1-x^2)^{\frac{1}{2}},\ (1-x^2)^n = \sin^{2n} t,$$

$$(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \sin^{2n-1} t;$$

par conséquent la relation ($\alpha$) devient :

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} t\,dt\,\varphi^{(n)}(\cos t) = 1 \cdot 3 \ldots (2n-1) \int_0^{\pi} \varphi(\cos t) \cos nt\,dt;$$

d'où l'on tire la formule (56). Cette forumule est due à Jacobi.

### 2me Théorème.

a *et* c *désignant des constantes réelles,* n *un nombre entier positif, on a :*

$$(57) \quad \int_0^{\infty} \varphi^{(n)}(x^2 + 2ac)dx =$$

$$c\left(\frac{a}{c}\right)^n\left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}\left(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^{2n}}+\frac{n(n-1}{1(2a)^2}\int_0^\infty \varphi^{(n-1)}\left(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^{2n-2}}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1(n-2)(n-3)}{1\cdot 2(2a)^4}\int_0^\infty \varphi^{(n-2)}\left(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^{2n-4}}+\text{etc.}\right]$$

*Démonstration.* Si nous différentions $n$ fois de suite par rapport à $a$ la formule (47), il vient :

$$\int_0^\infty \frac{d^n\varphi\left(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)dx}{da^n}=\frac{1}{c}\int_0^\infty \frac{d^n\varphi(x^2+2ac)dx}{da^n}. \qquad (\alpha)$$

Mais si dans la formule connue :

$$\frac{d^n f(a^2)}{da^n}=(2a)^n f^{(n)}(a^2)+\frac{n(n-1)}{1}(2a)^{n-2}f^{(n-1)}(a^2)$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2a)^{n-4}f^{(n-2)}(a^2)+\text{etc.},$$

on pose $\qquad f(a^2)=\varphi\left(c^2x^2+\frac{1}{x^2}a^2\right),$

d'où $\qquad f^{(p)}(a^2)=\left(\frac{1}{x^2}\right)^p\varphi^{(p)}\left(c^2x^2+\frac{1}{x^2}a^2\right),$

on trouve :

$$(\beta)\int_0^\infty \frac{d^n\varphi\left(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)dx}{da^n}=(2a)^n\left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}\left(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^{2n}}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1(2a)^2}\int_0^\infty \varphi^{(n-1)}\left(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^{2n-2}}+\text{etc.}\right]$$

Mais on a aussi :

$$\frac{d^n\varphi(x^2+2ac)}{da^n}=(2c)^2\varphi^{(n)}(x^2+2ac),$$

d'où :

$$\int_0^\infty \frac{d^n \varphi(x^2+2ac)}{da^n} = (2c)^2 \int_0^\infty \varphi^{(n)}(x^2+2ac)dx. \quad (\gamma)$$

Les formules ($\alpha$), ($\beta$), et ($\gamma$) donnent immédiatement la formule cherchée (57).

*Corollaire.* Si dans la formule (57) on fait $x^2 = z$, d'où : $dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$, si de plus on change $a^2$, $c^2$, en $a, c$ et qu'on remplace de nouveau $z$ par $x$, il vient :

$$(58) \quad \int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\sqrt{c}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{2}}\left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}\left(cx+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x^n\sqrt{x}} + \frac{n(n-1)}{1\cdot(2\sqrt{a})^2}\int_0^\infty \varphi^{(n-1)}\left(cx+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x^{n-4}\sqrt{x}}\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2(2\sqrt{a})^4}\int_0^\infty \varphi^{(n-2)}\left(cx+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x}}$$

$$\left. + \text{etc.}\right]$$

### 3$^{me}$ Théorème.

*a et c étant des constantes réelles, n un nombre entier positif, on a :*

$$(59) \int_0^\infty \varphi^{(n)}(x^2+2ac)dx =$$

$$c\left(\frac{c}{a}\right)^n\left[\int_0^\infty x^{2n}\varphi^{(n)}\left(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)dx + \frac{(n+1)n}{1\cdot(2c)^2}\int_0^\infty x^{2n-2}\varphi^{(n-1)}\left(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)dx\right.$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2(2c)^4}\int_0^\infty x^{2n-4}\varphi^{(n-2)}(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})dx$$

$$+ \text{ etc.} \Big]$$

*Démonstration*. Si nous différentions l'équation

$$\int_0^\infty c\cdot\varphi(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})dx=\int_0^\infty \varphi(x^2+2ac)dx,$$

$n$ fois de suite par rapport à $c$, nous avons ;

$$\int_0^\infty \frac{d^n\varphi(x^2+2ac)dx}{dc^n}=\int_0^\infty \frac{d^n c\cdot\varphi(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})dx}{dc^n}. \quad (\alpha)$$

Mais à cause des formules différentielles

$$\frac{d^n[c\cdot f(c^2)]}{dc^n}=c\cdot\frac{d^nf(c^2)}{dc^n}+n\frac{d^{n-1}f(c^2)}{dc_n^{-1}},$$

$$\frac{d^nf(c^2)}{dc^n}=(2c)^nf^{(n)}(c^2)+\frac{n(n-1)}{1}(2c)^{n-2}f^{(n-1)}(c^2)$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2c)^{n-4}f^{(n-2)}(c^2)+\text{etc.},$$

on a :

$$\frac{d^nf(c^2)\cdot c}{dc^n}=(2c)^n c[f^{(n)}(c^2)+\frac{(n+1)n}{1(2c)^2}f^{(n-1)}(c^2)$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2(2c)^4}f^{(n-2)}(c^2)+\text{etc.}]$$

Soit $f(c^2)=\varphi(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})$, d'où $f^{(p)}(c^2)=(x^2)^p\varphi^{(p)}(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})$,

on aura : $(\beta,$

$$\frac{d^n\varphi(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})c}{dc^n}=(2c)^n c\Big[x^{2n}\varphi^{(n)}(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})$$

$$+\frac{(n+1)n}{1\cdot(2c)^2}x^{2n-2}\varphi^{(n-1)}(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2(2c)^4}x^{2n-4}\varphi^{(n-2)}(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})+\text{etc.}\Big]$$

Comme on a aussi : $\dfrac{d^n\varphi(x^2+2ac)}{dc^n}=(2a)^n\varphi^{(n)}(x^2+2ac)$, $(\gamma)$

l'on voit que les formules $(\gamma)$, $(\beta)$, et $(\alpha)$ conduisent à la relation cherchée (59).

*Corollaire.* Posons dans (59), $x^2=z$, $a^2=a$, $c^2=c$, puis remplaçons de nouveau $z$ par $x$, il viendra :

$$(60)\quad \int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$\sqrt{c}\,(\frac{c}{a})\Big[\int_0^\infty x^n\varphi^{(n)}(cx+\frac{a}{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}+$$

$$\frac{(n+1)n}{1\cdot(2\sqrt{c})^2}\int_0^\infty x^{n-1}\varphi^{(n-1)}(cx+\frac{a}{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\text{etc.}\Big]$$

## 4$^{me}$ Théorème.

a *et* c *étant des constantes réelles*, n *un nombre entier positif*, *on a :*

$$(61)\quad \int_0^\infty \varphi^{(n)}(cx+\frac{a}{x})\frac{dx}{x^n\sqrt{x}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}}(\frac{c}{a})^{\frac{n}{2}}\Big[\int_0^\infty \varphi^{(n)}[x+2\sqrt{ac}]\frac{dx}{\sqrt{x}}-$$

$$\frac{n(n-1)}{2\cdot 2\sqrt{ac}}\int_0^\infty \varphi^{(n-1)}[x+2\sqrt{ac}]\frac{dx}{\sqrt{x}}+$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4(2\sqrt{ac})^2}\int_0^\infty \varphi^{(n-2)}[x+2\sqrt{ac}]\frac{dx}{\sqrt{x}} + \text{etc.}\Big]$$

*Démonstration.* En différentiant la formule (47), $n$ fois de suite par rapport à $a$, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{d^n\varphi(cx+\frac{a}{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}}{da^n} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{d^n\varphi(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}}{da^n}. \quad (\alpha)$$

Mais si dans la formule différentielle connue

$$\frac{d^n f(\sqrt{a})}{da^n} = \frac{1}{2n}\Big[\frac{f^{(n)}(\sqrt{a})}{(\sqrt{a})^n} - \frac{n(n-1)}{2}\frac{f^{(n-1)}(\sqrt{a})}{(\sqrt{a})^{n+1}}$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4}\frac{f^{(n-2)}(\sqrt{a})}{(\sqrt{a})^{n+2}} - \text{etc.}\Big],$$

on fait :

$f(\sqrt{a}) = \varphi(x+2\sqrt{c}\cdot\sqrt{a})$, d'où : $f^{(p)}(\sqrt{a}) = (2\sqrt{c})^p\varphi^{(p)}[x+2\sqrt{ac}]$,

il vient :

$$\frac{d^n\varphi(x+2\sqrt{ac})}{da^n} = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\Big[\varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac}) - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2\sqrt{ac}}\varphi^{(n-1)}(x+2\sqrt{ac})$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4(2\sqrt{ac})^2}\varphi^{(n-2)}(x+2\sqrt{ac}) + \text{etc.}\Big]. \quad (\beta$$

Comme on a aussi :

$$\frac{d^n\varphi(cx+\frac{a}{x})}{da^n} = \frac{1}{x^n}\varphi^{(n)}(cx+\frac{a}{x}), \quad (\gamma)$$

l'on voit que la combinaison des formules $(\alpha)$, $(\beta$, $(\gamma)$, conduit à (61).

*Corollaire.* Si dans la formule (61) on pose $x=z^2$, $a=a^2$, $c=c^2$, et qu'on remplace $z$ par $x$, il vient :

$$(62) \int_0^\infty \varphi^{(n)}(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x^{2n}} =$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{c}{a}\right)^n\left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x^2+2ac)dx - \frac{n(n-1)}{2(2ac)}\int_0^\infty \varphi^{(n-1)}(x^2+2ac)dx\right.$$

$$\left.+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot4(2ac)^2}\int_0^\infty \varphi^{(n-2)}(x^2+2ac)dx + \text{etc.}\right].$$

5$^{me}$ THÉORÈME.

a *et* c *étant des constantes réelles,* n *un nombre entier positif, on a :*

$$(63)\ \int_0^\infty x^n\varphi^{(n)}\left(cx+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{2}}\left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}\left(x+2\sqrt{ac}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}-\right.$$

$$\frac{(n+1)n}{2(2\sqrt{ac})}\int_0^\infty \varphi^{(n-1)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}+$$

$$\left.\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot4(2\sqrt{ac})^2}\int_0^\infty \varphi^{(n-2)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}-\text{etc.}\right]$$

*Démonstration.* En différentiant (47) $n$ fois de suite par rapport à $c$, on a :

$$\int_0^\infty \frac{d^n\varphi\left(cx+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}}{dc^n}=\int_0^\infty \frac{d^n\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\varphi(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}\right]}{dc^n}. \quad (\alpha)$$

Mais à cause des formules différentielles connues :

$$\frac{d^n\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot f(\sqrt{c})\right]}{dc^n}=\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{d^n f(\sqrt{c})}{dc^n}+n\cdot\frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}{dc}\cdot\frac{d^{n-1}f(\sqrt{c})}{dc^{n-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{d^2\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}{dc^2}\cdot\frac{d^{n-2}f(\sqrt{c})}{dc^{n-2}}+\text{etc.},$$

$$\frac{d^r\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}{dc^r}=(-1)^r\frac{1\cdot 3\ldots(2r-1)}{2^r c^r\sqrt{c}},$$

$$\frac{d^n f(\sqrt{c})}{dc^n}=\frac{1}{2^n}\left[\frac{f^{(n)}(\sqrt{c})}{(\sqrt{c})^n}-\frac{n(n-1)}{2}\frac{f^{(n-1)}(\sqrt{c})}{(\sqrt{c})^{n+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4}\frac{f^{(n-2)}(\sqrt{c})}{(\sqrt{c})^{n+2}}-\text{etc.}\right],$$

il vient :

$$\frac{d^n\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot f(\sqrt{c})\right]}{dc^n}=\frac{1}{2^n\sqrt{c}}\left[\frac{f^{(n)}(\sqrt{c})}{(\sqrt{c})^n}-\frac{(n+1)n}{2}\frac{f^{(n-1)}(\sqrt{c})}{(\sqrt{c})^{n+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4}\cdot\frac{f^{(n-2)}(\sqrt{c})}{(\sqrt{c})^{n+2}}-\text{etc.}\right].$$

Or, en posant

$f(\sqrt{c})=\varphi(x+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{c})$, d'où $f^{(p)}(\sqrt{c})=(2\sqrt{a})^p\varphi^{(p)}(x+2\sqrt{ac})$, la formule précédente donne :

$$\frac{d^n\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\varphi(x+2\sqrt{ac})\right]}{dc^n}=\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\left[\varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\right.$$

$$-\frac{(n+1)n}{2(\sqrt{ac})}\varphi^{(n-1)}(x+2\sqrt{ac})+$$

$$\left.\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4(2\sqrt{ac})^2}\varphi^{(n-2)}(x+2\sqrt{ac})-\text{etc.}\right],\quad(\beta.$$

comme d'ailleurs on a :

$$\frac{d^n\varphi(cx+\frac{a}{x})}{dc^n} = x^n\varphi^{(n)}(cx+\frac{a}{x}), \quad (\gamma),$$

l'on voit que la combinaison des formules ($\alpha$), ($\beta$, ($\gamma$), conduit à la formule (62).

*Corollaire* $x$, $a$, $c$, en $x^2$, $a^2$, $c^2$, la formule (63), devient :

$$(64) \int_0^\infty x^{2n}\varphi^{(n)}(c^2x^2+\frac{a}{x})dx =$$

$$\frac{1}{c}(\frac{a}{c})^n\Big[\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x^2+2ac)dx -$$

$$\frac{(n+1)n}{2(2ac)}\int_0^\infty \varphi^{(n-1)}(x^2+2ac)dx + \text{etc.} \Big].$$

*Remarque.* L'on s'aperçoit aisément, que : 1° les formules (57) et (62) ; 2° les formules (58) et 61 ; 3° (59) et (64) ; 4° (60) et (63) sont réciproques l'une de l'autre. De ces huit formules, les quatre (58), (60), (61), (63) sont seules distinctes, dont la 3$^{me}$ est la réciproque de la 1$^{re}$, et la 4$^e$ la réciproque de la 2$^{de}$.

## VI.

## INVERSION DU SIGNE D'INTÉGRATION DANS LES INTÉGRALES DOUBLES, A LIMITES CONSTANTES.

Nous distinguerons deux cas : 1° le cas de *continuité*, celui où la fonction $f(x,y)$ reste continue pour toutes les valeurs de $x$, depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$, limites de l'intégrale relative à $x$, et pour toutes les valeurs de $y=\alpha$, jusqu'à $y=\beta$, limites de l'intégration par rapport à $y$; 2° le cas de *discontinuité*, celui où la

fonction $f(x, y)$ pour les valeurs $x=c$, $y=e$, comprises entre leurs limites respectives d'intégration, devient infinie, ou indéterminée.

## Cas de Continuité.

### 1er Théorème.

a *et* b *étant les limites de l'intégration par rapport à* x, $\alpha$ *et* $\beta$ *celles de l'intégrale relative à* y, *si la fonction* f(x,y), *ne devient infinie ni indéterminée, pour aucune valeur de* x *comprise entre* a *et* b, *ni pour aucune valeur de* y, *depuis* $y=\alpha$, *jusqu'à* $y=\beta$, *on pourra intervertir l'ordre d'intégration, et l'on aura :*

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy. \quad (63)$$

*Démonstration.* En effet, la fonction $f(x,y)$, étant continue par rapport à $x$, on aura, en vertu de la formule (8), et en regardant $y$ comme constant :

$$\int_a^b f(x.y)dx = da\left[f(a,y) + f(a+da, y) + \ldots f a + \overline{n-1}\, da, y)\right].$$

Multiplions par $dy$, et intégrons entre les limites $\alpha$ et $\beta$, on a :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\,dx = da\left[\int_\alpha^\beta f(a, y)dy + \int_\alpha^\beta f(a+da, y)dy + \right.$$

$$\left. \ldots + \int_\alpha^\beta f(a+\overline{n-1}\, da, y)\, dy\right].$$

Mais comme la fonction $f(x,y)$ demeure continue pour les valeurs de $y$ prises entre $\alpha$ et $\beta$, on pourra développer par la même formule (8), chacune des intégrales du second membre ; en écrivant chacun de ces développements, où l'on suppose

$$\beta=\alpha+md\alpha,$$

dans une même colonne verticale, on a :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = da\,d\alpha\Big[ f(a,\alpha) + f(a+da,\alpha) + \text{etc.} + f(a+\overline{n-1}\,da,\alpha)$$

$$f(a,\alpha+d\alpha) + f(a+da,\alpha+d\alpha) + \text{etc.} + f(a+\overline{n-1}\,da,\alpha+d\alpha)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(a,\alpha+\overline{m-1}\,d\alpha) + f(a+da,\alpha+\overline{m-1}\,d\alpha) + \text{etc.}$$

$$+ f(a+\overline{n-1}\,da,\alpha+\overline{m-1}\,d\alpha)\Big]$$

En second lieu, la formule (8), appliquée d'abord à l'intégration relative à $y$, nous donne :

$$\int_\alpha^\beta f(x,y)dy = d\alpha[f(x,\alpha) + f(x,\alpha+d\alpha) + \ldots + f(x,\alpha+\overline{m-1}\,d\alpha)];$$

d'où l'on tire :

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy$$

$$= d\alpha\Big[\int_a^b f(x,\alpha)dx + \int_a^b f(x,\alpha+d\alpha)dx + \ldots + \int_a^b f(x,\alpha+\overline{m-1}\,d\alpha)dx\Big]$$

$$= d\alpha\,da[f(a,\alpha) + f(a,\alpha+d\alpha) + \text{etc.} + f(a,\alpha+\overline{m-1}\,d\alpha) +$$

$$f(a+da,\alpha) + f(a+da,\alpha+d\alpha) + \text{etc.} + f(a+da,\alpha+\overline{m-1}\,d\alpha) +$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(a+\overline{n-1}\,da,\alpha) + f(a+\overline{n-1}\,da,\alpha+d\alpha) + \text{etc.}$$

$$+ f(a+\overline{n-1}\,da,\alpha+\overline{m-1}\,d\alpha)].$$

En comparant les seconds membres des formules ($\alpha$) et ($\beta$), l'on s'apercevra qu'ils ne diffèrent que par l'arrangement de leurs termes, savoir que les termes placés verticalement dans l'une de ces formules, le sont horizontalement dans l'autre ; donc, en égalant les premiers membres de ces formules, on a la relation cherchée (65).

*Remarque.* Nous verrons dans le 2d livre de cet ouvrage l'usage que l'on fait de cette relation dans la recherche des valeurs des intégrales définies ; pour en donner une idée dès à-présent, soit :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = k,$$

et cherchons à déterminer $k$.

Pour cela, soit $t^2=yx^2$; d'où $t=x\sqrt{y}$, $dt=dx\sqrt{y}$; $y$ est ici considéré comme une constante; les limites de l'intégrale ne changeront pas, et l'on a :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\int_0^\infty \sqrt{y}\cdot e^{-yx^2}dx=k;$$

$$\text{d'où :}\quad \int_0^\infty e^{-yx^2}dx=\frac{k}{\sqrt{y}};$$

$$\text{par suite :}\quad e^{-y}dy\int_0^\infty e^{-yx^2}dx=\frac{ke^{-y}dy}{\sqrt{y}},\ \text{et}$$

$$\int_0^\infty e^{-y}dy\int_0^\infty e^{-yx^2}dx=k\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}}e^{-y}.$$

Mais puisque $e^{-y}$ est constant quand $x$ varie seul, on a :

$$\int_0^\infty e^{-y}dy\int_0^\infty e^{-yx^2}dx=\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-y}e^{-yx^2}dx=\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-y(1+x^2)}dx.$$

Si nous intervertissons l'ordre dans cette dernière intégrale double, il vient :

$$\int_0^\infty e^{-y}dy\int_0^\infty e^{-yx^2}dx=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-y(1+x^2)}dx.$$

Mais on a :

$$\int e^{-y(1+x)^2}dy=-\frac{e^{-y(1+x^2)}}{1+x^2},\ \int_0^\infty e^{-y(1+x^2)}dy=\frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{donc :}\quad \int_0^\infty e^{-y}dy\int_0^\infty e^{-yx^2}dx=\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2},$$

$$\text{ou}\quad k\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}}\,e^{-y}=\frac{\pi}{2}.$$

Mais si nous posons $y=z^2$, les limites de l'intégrale ne changeront pas; et l'on aura :

$$\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}}\,e^{-y}=2\int_0^\infty dz\,e^{-z^2}=2\int_0^\infty dt\,e^{-t^2}=2k;$$

donc l'équation précédente devient :

$$2k^2=\frac{\pi}{2},\quad \text{d'où :}\quad k=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,;$$

on a, par suite :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

### Cas de Discontinuité.

#### 2me Théorème.

*Si la fonction* f(x, y) *devient infinie, ou indéterminée pour la valeur* x = c, *comprise entre* a *et* b, *et pour une certaine valeur de* y *située entre* α *et* β, *et que l'on intégre* f(x, y) dx dy, *d'abord par rapport à* x, *et ensuite par rapport à* y, *je dis :* 1° *qu'il ne sera plus permis d'intervertir l'ordre des intégrations, et* 2° *qu'en l'intervertissant, il faut, pour rétablir l'égalité, ajouter au résultat obtenu, la correction, ou l'intégrale singulière :*

$$\Delta=\int_\alpha^\beta dy\int_{c-dc}^{c+dc} f(x,y)\,dx.\quad (66)$$

*Démonstration.* 1° Si pour la valeur $x=c$, comprise entre $a$ et $b$, et la valeur donnée de $y$, la fonction $f(x,y)$ cesse d'être finie et déterminée, il y aura au moins un terme dans les seconds mem-

bres de ($\alpha$) et ($\beta$) qui deviendra infini ou indéterminé, dès-lors on ne pourra plus conclure qu'ils sont égaux, comme cela est requis pour justifier l'inversion.

2° Comme la fonction $f(x,y)$ est discontinue pour $x=c$, on a, par les formules (39), (39'),

$$\int_a^b f(x,y)dx = F(b,y) - F(a,y) - \int_{c-dc}^{c+dc} f(x,y)dy\,;$$

donc, en multipliant par $dy$, et en intégrant entre $\alpha$ et $\beta$, il vient :

$$(\alpha)\quad \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta dy\,[\,F(b,y) - F(a,y)\,]$$
$$- \int_\alpha^\beta dy \int_{c-dc}^{c+dc} f(x,y)\,dx.$$

Mais dans le cas de continuité on a :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy\,;$$

donc, dans le cas de discontinuité, il faudra remplacer le 1[er] membre par sa valeur ($\alpha$), et l'on aura :

$$\int_\alpha^\beta dy\,[\,F(b,y) - F(a,y)\,] - \int_\alpha^\beta dy \int_{c-dc}^{c+dc} f(x,y)dx$$
$$= \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy\,;$$

d'où :

$$\int_\alpha^\beta dy\,[\,F(b,y) - F(a,y)\,] = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy + \Delta.$$

Donc, à cause de (37) :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy + \Delta, \qquad (67)$$

$$\Delta = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{c-dc}^{c+dc} \mathrm{f}(x,y)\,dx.$$

1re *Remarque.* Si la fonction $\mathrm{f}(x,y)$ devenait discontinue, non-seulement pour $x=c$, mais encore pour plusieurs autres valeurs de $x$ comprises entre $a$ et $b$, il faudrait ajouter au 2d membre de (67) une correction, semblable à $\Delta$, pour chacune de ces valeurs.

2me *Remarque.* Pour déterminer la correction $\Delta$, il faut recourir à l'intégrale indéfinie de $\mathrm{f}(x,y)dx$; soit

$$\int \mathrm{f}(x,y)dx = \mathrm{F}(x,y) + \mathrm{C};$$

on aura, par la formule (37) :

$$\int_{c-dc}^{c+dc} \mathrm{f}(x,y)\,dy = \mathrm{F}(c-dc,y) - \mathrm{F}(c-dc,y).$$

d'où :

$$\Delta = \int_{\alpha}^{\beta} dy\,[\mathrm{F}(c+dc,y) - \mathrm{F}(c-dc,y)]. \quad (68)$$

3me *Remarque.* On a supposé, dans le théorème précédent, que $\mathrm{f}(x,y)$ devenait discontinue, pour une valeur de $x$, comprise entre $a$ et $b$, et une certaine valeur de $y$ située entre $\alpha$ et $\beta$; mais il arrive fréquemment que cette discontinuité a lieu à l'une des limites; dans ce cas la correction $\Delta$ subit une modification, que je vais indiquer.

1°.

f(x,y) *devient discontinu pour* x=a, *et une certaine valeur de* y *comprise entre* $\alpha$ *et* $\beta$.

Dans le cas où $\mathrm{f}(x,y)$ est continu, on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{b} \mathrm{f}(x,y)dx = \int_{a}^{b} dx \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f}(x,y)dy,$$

formule qui, alors, en vertu de (10′), peut être remplacée par la suivante :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_{a+da}^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy. \quad (\alpha)$$

Mais si la fonction $f(x,y)$ est discontinue en a, on trouve, par la formule (40),

$$\int_\alpha^\beta dy \int_{a+da}^b f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx - \int_\alpha^\beta dy \int_a^{a+da} f(x,y)dx.$$

Il faut donc, dans le cas de discontinuité dont il s'agit, remplacer le 1[er] membre de $(\alpha)$ par cette dernière valeur, et alors on trouve, en transposant :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_a^\beta f(x,y)dy + \Delta, \quad (69)$$

$$\Delta = \int_\alpha^\beta dy \int_a^{a+da} f(x,y)dx, \quad (70)$$

$$= \int_\alpha^\beta dy\,[F(a+da,y) - (a,y)]. \quad (71)$$

2°.

f(x,y) *devient discontinu pour* x = b, *et une certaine valeur de* y, *comprise entre* $\alpha$ *et* $\beta$.

On a d'abord, en supposant $f(x,y)$ continu,

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int^\beta f(x,y)dy,$$

où, en vertu de la formule (10′) :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^{b-db} f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy. \quad (\alpha)$$

Mais à cause de la formule (41), on a, pour le cas de discontinuité qui nous occupe :

$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{b-db} \mathrm{f}(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{b} \mathrm{f}(x,y)dx - \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{b-db}^{b} \mathrm{f}(x,y)dx.$$

Il faudra donc mettre cette valeur à la place du 1[er] membre de ($\alpha$), et alors on obtient, en transposant :

$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{b} \mathrm{f}(x,y)dx = \int_{a}^{b} dx \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f}(x,y)dy + \Delta, \quad (72)$$

$$\Delta = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{b-db}^{b} \mathrm{f}(x,y)dx, \quad (73)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} dy\,[\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(b-db)]. \quad (74)$$

Ces cas de discontinuité ne sont pas les seuls qui peuvent se présenter, car la fonction $\mathrm{f}(x,y)$ peut admettre une solution de continuité dans les circonstances suivantes :

1° pour $x=c$, situé entre $a$ et $b$, et $y=e$, situé entre $\alpha$ et $\beta$;
2° pour $x=a$, . . et . . . $y=e$;
3° pour $x=b$, . . et . . . $y=e$;
4° pour $x=c$, . . et . . . $y=\alpha$;
5° pour $x=c$, . . et . . . $y=\beta$;
6° pour $x=a$, . . et . . . $y=\alpha$;
7° pour $x=b$, . . et . . . $y=\alpha$;
8° pour $x=a$, . . et . . . $y=\beta$;
9° pour $x=b$, . . et . . . $y=\beta$.

Il n'entre pas dans le plan de cet ouvrage de donner le détail complet de ces cas; les formules que nous avons données pour les trois premiers cas, suffisent en grande partie, et indiquent la marche à suivre pour calculer les formules qui se rapportent aux autres; on pourra, au reste, consulter sur cet objet, un Mémoire de M. Cauchy, *Savants étrangers*, tom. I, pag. 619,

où l'on trouvera tous ces détails. Eclaircissons maintenant tout ceci par un exemple.

*Exemple.* Soit l'intégrale double :

$$\int_{-1}^{+1} dy \int_{-1}^{+1} \frac{(x^2-y^2)dx}{(x^2+y^2)^2};$$

on a ici : $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, fonction qui devient indéterminée pour $x=0$, $y=0$, valeurs comprises respectivement entre les limites $a=-1$, $b=+1$ ; $\alpha=-1$, $\beta=+1$.

On a donc :

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} \frac{(x^2-y^2)dx}{(x^2+y^2)^2} = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \frac{(x^2-y^2)dy}{(x^2+y^2)^2} - \Delta, \qquad (\alpha)$$

$$\Delta = \int_{-1}^{1} dy \int_{0-dc}^{0+dc} \frac{(x^2-y^2)dx}{(x^2+y^2)^2},$$

formules qu'il s'agit de vérifier.

1° Comme on a : $d\cdot\frac{z}{k^2+z^2}) = \frac{(k^2-z^2)dz}{(k^2+z^2)^2}$, il vient :

$$\int \frac{(x^2-y^2)dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2} + C, \text{ donc } \int_{-1}^{1} \frac{(x^2-y^2)dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2}{1+y^2},$$

$$\int \frac{(x^2-y^2)dy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y}{x^2+y^2} + C, \text{ donc } \int_{-1}^{1} \frac{(x^2-y^2)dy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

De là on déduit :

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} \frac{(x^2-y^2)dx}{(x^2+y^2)^2} = \int_{-1}^{1} \frac{-2dy}{1+y^2}$$

$$= -2 \operatorname{arc\,tg}(+1) + 2 \operatorname{arc\,tg}(-1) = -2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\pi ;$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \frac{(x^2 - y^2)dy}{(x^2+y^2)^2} = \int_{-1}^{1} \frac{2dx}{1+x^2}$$

$$= 2 \operatorname{arc\,tg}(+1) - 2 \operatorname{arc\,tg}(-1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = +\pi.$$

Ces deux résultats inégaux $-\pi$ et $+\pi$, font voir que l'inversion de l'ordre des intégrations n'est point permise.

2° Comme on a :

$$\int \frac{(x^2 - y^2)dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2} + C,$$

il vient :

$$\int_{-dc}^{dc} \frac{(x^2 - y^2)dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2dc}{dc^2+y^2},$$

$$\int dy \int_{-dc}^{de} \frac{(x^2 - y^2)dx}{(x^2+y^2)^2} = -2 \int \frac{dc\,dy}{dc^2+dy^2}$$

$$= -2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{dc} + C,$$

donc :

$$\Delta = \int_{-1}^{1} dy \int_{-dc}^{dc} \frac{(x^2 - y^2)dx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= -4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{dc} = -4 \operatorname{arc\,tg} \infty = -4 \times \frac{\pi}{2} = -2\pi ;$$

par là, l'égalité ($\alpha$) pourra se vérifier, et on trouve en effet :

$$-\pi = +\pi - 2\pi.$$

4^me^ *Remarque.* On peut encore présenter les formules pour l'inversion des intégrales doubles sous une autre forme. Soit, en

effet, $u$ une fonction de $x$, et $y$, on aura, pour la différentielle de $F(u)$ :

$$\frac{dF(u)}{du}\cdot du = \left[\frac{dF(u)}{du}\right]\frac{du}{dx}\cdot dx + \left[\frac{dF(u)}{du}\right]\frac{du}{dy}\cdot dy.$$

Soit $\frac{dF(u)}{du} = \psi(u)$, $\left[\frac{dF(u)}{du}\right]\frac{du}{dx} = \varphi(x, y)$,

$\left[\frac{dF(u)}{du}\right]\frac{du}{dy} = \chi(x, y)$; cette même différentielle deviendra :

$$\psi(u)du = \varphi(x,y)dx + \chi(x,y)dy, \quad (75)$$

et l'on aura :

$$\varphi(x,y) = \psi(u)\cdot\frac{du}{dx}, \chi(x,y) = \psi(u)\cdot\frac{du}{dy}. \quad (75')$$

Différentions la 1[re] par rapport à $y$, et la 2[de] par rapport à $x$, on aura :

$$\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy} = \psi(u)\cdot\frac{d^2u}{dxdy} + \psi'(u)\frac{du}{dy}\cdot\frac{du}{dx} = \mathrm{f}(x,y),$$

$$\frac{d\cdot\chi(x,y)}{dx} = \psi(u)\cdot\frac{d^2u}{dx\,dy} + \psi'(u)\frac{du}{dx}\cdot\frac{du}{dy} = \mathrm{f}(x,y);$$

par suite :

$$\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\cdot\chi(x,y)}{dx} = \mathrm{f}(x,y). \quad (76)$$

Remplaçons $\mathrm{f}(x, y)$, par ces valeurs dans l'intégrale double $\int_\alpha^\beta dy\int_a^b \mathrm{f}(x,y)dx$, on aura, dans le cas de continuité :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b \frac{d\chi(x,y)}{dx}\cdot dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta \frac{d\varphi(xy)}{dy}\,dy,$$

ou,

$$\int_\alpha^\beta dy\,[\chi(b,y) - \chi(a,y)] = \int_a^b dx\,[\varphi(x,\beta) - \varphi(x,\alpha)]; \quad (77)$$

et dans le cas de discontinuité, en vertu de (68),

$$\int_{\alpha}^{\beta} dy\,[\chi(b,y)-\chi(ay)]=\int_{a}^{b} dx\,[\varphi(x,\beta)-\varphi(x,\alpha)]+\Delta, \quad (78)$$

$$\Delta=\int_{\alpha}^{\beta} dy\,[\chi(c+dc,y)-\chi(c-dc,y)]. \quad (78')$$

*Exemple.* Soient $\varphi(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\chi(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, on a :

$$\alpha=-1,\ \beta=+1,\ a=-1,\ b=+1, \text{ d'où :}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{2dy}{1+y^2}=\int_{-1}^{1}\frac{-2dx}{1+x^2}+\Delta,\quad \Delta=\int_{-1}^{1}\frac{2dc\cdot dy}{dc^2+y^2}=2\pi;$$

donc $\pi=-\pi+2\pi$.

5$^{me}$ *Remarque.* Les formules (78) et (78′) prennent une forme très-simple lorsqu'on pose :

$$u=x+y\sqrt{-1},\ \psi(u)=\psi(x+y\sqrt{-1}).$$

Alors on a, par (75′) :

$$\varphi(x,y)=\psi(x+y\sqrt{-1})\frac{d(x+y\sqrt{-1})}{dx}=\psi(x+y\sqrt{-1}),$$

$$\chi(x,y)=\psi(x+y\sqrt{-1})\frac{d(x+y\sqrt{-1})}{dy}=\sqrt{-1}\,\psi(x+y\sqrt{-1});$$

d'où l'on tire :

$$\varphi(x,\beta)=\psi(x+\beta\sqrt{-1}),\ \varphi(x,\alpha)=\psi(x+\alpha\sqrt{-1});$$

$$\chi(b,y)=\sqrt{-1}\,\psi(b+y\sqrt{+1}),\ \chi(a,y)=\sqrt{-1}\,\psi(a+y)\sqrt{-1});$$

$$\chi(c+dc,y)=\sqrt{-1}\,\psi(c+dc,y\sqrt{-1}),$$

$$\chi(c-dc,y)=\sqrt{-1}\,\psi(c-dc+y\sqrt{-1});$$

par là les formules (78), (78′) deviennent :

$$\sqrt{-1}\int_{\alpha}^{\beta} dy\,[\psi(b+y\sqrt{-1})-\psi(a+y\sqrt{-1})]$$

$$=\int_{a}^{b} dx\,[\psi(x+\beta\sqrt{-1})-\psi(x+\alpha\sqrt{-1})]+\Delta, \quad (79)$$

$$\Delta=\sqrt{-1}\int_{\alpha}^{\beta}dy\,[\psi(c+dc+y\sqrt{-1})-\psi(c-dc+y\sqrt{-1})]. \quad (79')$$

Nous avons supposé que la discontinuité de la fonction $\psi$ avait lieu au point $x=c$, $y=e$, $e$ étant compris entre $\alpha$ et $\beta$; donc, pour simplifier l'expression (79′), posons

$$y=e+z\cdot dc, \text{ ou } z=\frac{y-e}{dc};$$

alors les limites $y=\left\{\begin{matrix}\beta\\ \\ \alpha\end{matrix}\right.$, deviennent : $z=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\beta-e}{dc}=\infty\\ ,\\ -\dfrac{e-\alpha}{dc}=-\infty\end{matrix}\right.$,

et l'on aura :

$$\Delta=\sqrt{-1}\int_{-\frac{e-\alpha}{dc}}^{\frac{\beta-e}{dc}}dc\cdot dz\Big[\psi[c+dc+(e+zdc)\sqrt{-1}]$$
$$-\psi[c-dc+(e+zdc)\sqrt{-1}]\Big].$$

Soit

$$\psi(x)=\frac{\Theta(x)}{x-c-e\sqrt{-1}}, \quad (\alpha)$$

on aura :

$$\psi[c+dc+(e+zdc)\sqrt{-1}]$$
$$=\frac{\Theta[c+dc+(e+zdc)\sqrt{-1}]}{dc(1+z\sqrt{-1})}=\frac{\Theta[c+e\sqrt{-1}]}{dc(1+z\sqrt{-1})}.$$

$$\psi[c-dc+(e+zdc)\sqrt{-1}]$$
$$=\frac{\Theta[c-dc+(e+zdc)\sqrt{-1}]}{dc(-1+z\sqrt{-1})}=\frac{\Theta[c+e\sqrt{-1}]}{dc(-1+z\sqrt{-1})};$$

d'où :

$$\Delta=\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}dz\left[\frac{\Theta(c+e\sqrt{-1})}{1+z\sqrt{-1}}+\frac{\Theta(c+e\sqrt{-1})}{1-z\sqrt{-1}}\right]$$

$$=\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} dz\cdot\frac{2\,\Theta(c+e\sqrt{-1})}{1+z^2}$$

$$=2\,\Theta(c+e\sqrt{-1})\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}.$$

Mais $\int\frac{dz}{1+z^2}=\text{arc tg}\,z+c$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}=\text{arc tg}\,(\infty)-\text{arc tg}\,(-\infty)=2\,\text{arc tg}\,\infty=2\times\frac{\pi}{2}=\pi;$$

donc

$$\Delta=2\pi\times\Theta(c+e\sqrt{-1})\sqrt{-1}.\quad(\beta)$$

De la relation ($\alpha$) on déduit :

$$\Theta(x)=\psi(x)\times(x-c-e\sqrt{-1});$$

donc, pour $x=c+dc+e\sqrt{-1}$, cette dernière équation donne :

$$\Theta(c+dc+e\sqrt{-1})=\psi(c+e\sqrt{-1}+dc)\cdot dc.\quad(\gamma)$$

Soit $\theta=\psi(c+e\sqrt{-1}+dc)\cdot dc$; (81)

la formule ($\gamma$) devient :

$$\Theta(c+dc+e\sqrt{-1}=\theta,\quad\text{ou}$$

$$\Theta(c+e\sqrt{-1})=\theta;$$

par conséquent ($\beta$) devient :

$$\Delta=2\pi\,\theta\sqrt{-1}.\quad(81)$$

De la relation ($\alpha$) on tire :

$$\frac{1}{\psi(x)}=\frac{x-c-e\sqrt{-1}}{\Theta(x)};$$

or, pour $x=c+e\sqrt{-1}$, le second membre se réduit à zéro, par conséquent $x=c+e\sqrt{-1}$, est une racine de l'équation

$$\frac{1}{\psi(x)}=0;\quad(81)$$

la partie réelle $c$ de cette racine est comprise entre $a$ et $b$, et le

coëfficient $e$ de $\sqrt{-1}$, est entre $\alpha$ et $\beta$; de plus, ce coëfficient est supposé positif.

Reprenons l'équation (81)

$$\Delta=\sqrt{-1}\int_{-\frac{e-\alpha}{dc}}^{\frac{\beta-e}{dc}} dz\cdot\frac{\theta(c+e\sqrt{-1})}{1+z^2}=2\pi\theta\sqrt{-1},$$

et supposons 1° $e=\alpha$, la limite inférieure deviendra zéro, et l'on aura :

$$\Delta=\sqrt{-1}\int_0^{\infty} dz\cdot\frac{\theta(c+e\sqrt{-1})}{1+z^2}=\pi\theta\sqrt{-1}.$$

2° Soit $e=\beta$, la limite supérieure deviendra zéro, et l'on aura :

$$\Delta=\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{0} dz\cdot\frac{\theta(c+e\sqrt{-1})}{1+z^2}=\pi\theta\sqrt{-1}.$$

D'où l'on voit, que si la valeur $e$ de $y$, pour laquelle la fonction $\psi$ devient discontinue, coïncide avec l'une des limites $\alpha$ ou $\beta$, la correction $\Delta$ se réduit à sa moitié.

Il faut encore observer que si l'équation $\frac{1}{\psi(x)}=0$ avait plusieurs racines

$$x=c+e\sqrt{-1},\ x_1=c_1+e_1\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

dont les parties réelles seraient comprises entre $a$ et $b$, et les coëfficients, supposés positifs, de $\sqrt{-1}$, comprises entre $\alpha$ et $\beta$, il faudrait écrire :

$$\Delta=2\pi(\theta+\theta_1+\text{etc.})\sqrt{-1}, \quad (83)$$

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\psi(c+e\sqrt{-1}+dc)\cdot dc,\\ \theta_1&=\psi(c_1+e_1\sqrt{-1}+dc_1)\cdot dc_1,\end{aligned}\right\}\quad(84).$$
etc.

6$^{me}$ *Remarque.* De la formule (79) on tire, en transposant :

$$(83)\quad \int_a^b dx\left[\psi(x+\beta\sqrt{-1})-\psi(x+\alpha\sqrt{-1})\right]$$

$$=\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta dy\left[\psi(b+y\sqrt{-1})-\psi(a+y\sqrt{-1})\right]-\Delta.$$

Si on fait ici $a=-\infty$, $b=+\infty$, $\alpha=0$, $\beta=\infty$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\psi(x+\infty\sqrt{-1})-\psi(x)\right]$$

$$=\sqrt{-1}\int_0^\infty dy\left[\psi(\infty+y\sqrt{-1})-\psi(-\infty+y\sqrt{-1})\right]-\Delta.$$

Or, en admettant qee la fonction $\psi$ soit telle qu'on ait

$$\psi(x+y\sqrt{-1})=0,\ \text{pour}\ y=\infty,$$
$$\psi(x+y\sqrt{-1})=0,\ \text{pour}\ x=\pm\infty,$$

la relation précédente deviendra :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx=\Delta\,; \quad (85)$$

$$\Delta=2\pi(\theta+\theta_1+\text{etc.})\sqrt{-1},$$
$$\theta=\psi(c+dc+e\sqrt{-1})dc,$$
$$\theta_1=\psi(c_1+dc_1+e_1\sqrt{-1})dc_1,$$
etc.

7$^{me}$ *Remarque.* Supposons que la fonction $\psi$ se présente sous la forme fractionnaire

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{F(x)};$$

alors la formule (85) se modifiera un peu.

En effet, pour

$$x_1=c+e\sqrt{-1},\ x_2=c_1+e_1\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

on a $\dfrac{1}{\psi(x)}=0$, et par suite $F(x)=0$; d'où l'on voit que $x_1$, $x_2$, etc., sont les racines de cette dernière équation, dans laquelle les coëfficients de $\sqrt{-1}$ sont supposés positifs. Ensuite comme on a :

$$\psi(c+dc+e\sqrt{-1})$$
$$=\frac{f(c+dc+e\sqrt{-1})}{F(c+dc+e\sqrt{-1})}=\frac{f(c+e\sqrt{-1})}{F(c+e\sqrt{-1})+dc\,F'(c+e\sqrt{-1})}$$
$$=\frac{f(c+e\sqrt{-1})}{dc\,F'(c+e\sqrt{-1})}=\frac{f(x_1)}{dc\,F'(x_1)},$$

l'on aura :

$$\theta=\psi(c+dc+e\sqrt{-1})dc=\frac{f(x_1)}{F'(x_1)},$$
$$\theta_1=\psi(c_1+dc_1+e_1\sqrt{-1})dc^1=\frac{f(x_2)}{F'(x_2)},$$
etc.,

et par suite les relations (85) deviennent :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{F(x)}\,dx=\Delta, \quad (86)$$

$$\Delta=2\pi\left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{F'(x_2)}+\text{etc.}\right]\sqrt{-1}; \quad (87)$$

$x_1$, $x_2$, etc. sont les racines de l'équation

$$F(x)=0,$$

dans lesquelles les coëfficients de $\sqrt{-1}$ sont positifs. Si parmi les racines $x_1$, $x_3$, etc., il y en avait de réelles, comme alors le cëefficient de leur partie imaginaire est nul, ce coëfficient coïncidera avec la limite inférieure de l'intégrale relative à $y$, et la correction correspondante devra se réduire à moitié.

1<sup></sup>er *Exemple.* Soit $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{1+x^2}$; donc l'équation $F(x)=0$, devient $1+x^2=0$, et l'on a : $x_1=+\sqrt{-1}$, $x_2=-\sqrt{-1}$; comme le coëfficient de $\sqrt{-1}$, doit être positif, on rejette la seconde de ces racines; de plus, $F'(x_1)=2x$, donne $F'(x_1)=2\sqrt{-1}$; on a donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\;\frac{f(x)}{1+x^2}=2\pi\left[\frac{f(\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\right]\sqrt{-1}=\pi f(\sqrt{-1}). \quad (88)$$

2$^{me}$ *Exemple.* Soit $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{1-x^2}$. L'équation $F(x)=0$, devient $1-x^2=0$, d'où $x_1=-1$,
$x_2=+1$;
comme ces racines sont réelles, les corrections correspondantes doivent se réduire à moitié; de plus on a : $F'(x)=-2x$; donc :

$$F'(x_1)=+2,\ F'(x_2)=-2,$$

on a par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{1-x^2}dx=2\pi\left[\tfrac{1}{2}\frac{f(-1)}{2}-\tfrac{1}{2}\frac{f(+1)}{2}\right]\sqrt{-1},$$

$$=\frac{\pi}{2}[f(-1)-f(+1)]\sqrt{-1}. \quad (89)$$

La théorie de l'inversion des intégrales doubles dans le cas de discontinuité, et par suite celle des intégrales singulières, sont entièrement dûes à M. Cauchy, qui a publié ses premières recherches, sur cet important sujet, dans le tom. I$^{er}$ des *Savants étrangers*, 1827. On peut encore consulter sur cette matière les écrits suivants du même auteur :

*Leçons sur le calcul infinitésimal*, 1823, 25$^e$ et 34$^e$ leçon.

*Exercices de Mathématiques*, 1826, p. 85.

*Mémoire sur les Intégrales définies*, prises entre des limites imaginaires, année 1825.

*Exercices d'analyse*, année 1841, page 358.

*Bulletin de la Société philomatique*, année 1822.

## VII.

## DES INTÉGRALES DOUBLES A LIMITES VARIABLES.

Soit l'intégrale double $\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,y)dy$, dans lequel $\alpha$ et $\beta$ sont supposés être des fonctions de $x$, il est clair qu'il faudra

d'abord déterminer la valeur de l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)dy$, qui sera évidemment une fonction de $x$, telle que $F(x)$, puis intégrer $\int_a^b F(x)dx$. Dans ce cas, il n'est plus permis d'intervertir l'ordre des intégrations. Si donc on veut maintenir aux intégrales doubles à limites variables l'avantage de l'inversion, il faut préalablement les soumettre à des transformations, dont le but est de changer les limites variables en limites constantes. Les problèmes suivants ont pour objet ces sortes de transformations.

### 1er Problème.

*$\alpha$ et $\beta$ étant des fonctions de* x, *faire dépendre l'intégrale double* $\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy$, *de plusieurs autres dans lesquelles les limites inférieures* a, $\alpha$ *sont zéro.*

*Solution.* On a, par la formule (21) :

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy = \int_0^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy - \int_0^a dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy, \quad (\alpha)$$

$$\int_\alpha^\beta f(x,y)dy = \int_0^\beta f(x,y)dy - \int_0^\alpha f(x,y)dy;$$

de celle-ci on tire :

$$\int_0^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy = \int_0^b dx \int_0^\beta f(x,y)dy - \int_0^b dx \int_0^\alpha f(x,y)dy,$$

$$\int_0^a dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy = \int_0^a dx \int_0^\beta f(x,y)dy - \int_0^a dx \int_0^\alpha f(x,y)dy.$$

En substituant ces expressions dans ($\alpha$), on trouve :

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy = \int_0^b dx \int_0^\beta f(x,y)dy - \int_0^b dx \int_0^\alpha f(x,y)dy$$

$$- \int_0^b dx \int_0^\beta f(x,y)dy + \int_0^b dx \int_0^\alpha f(x,y)dy. \qquad (90)$$

2^me^ PROBLÈME.

*$\beta$ étant une fonction de* x, *convertir l'intégrale*

$$\int_0^c dx \int_0^\beta f(x,y)\,dy$$

*en une autre dans laquelle la limite supérieure $\beta$ devienne l'unité.*

*Solution.* Posons $y = \beta \cdot z$ ; aux limites $y = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \\ 0 \end{matrix} \right.$, répondent les limites $z = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \\ 0 \end{matrix} \right.$, et l'on a :

$$\int_0^c dx \int_0^\beta f(x,y)dy = \int_0^c dx \int_0^1 f(x, \beta \cdot z)\,\beta dz. \qquad (91)$$

*Exemple.*

$$\int_0^\infty dx \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot e^{-(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)}$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\, e^{-\beta^2 z^2} \cdot e^{-(\alpha^2 + \beta^2 z^2) x^2},$$

$$= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} e^{-\beta^2 z^2} \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2 z^2)x^2} dx ,$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(\alpha^2+\beta^2 z^2)}} \cdot e^{-\beta^2 z^2} ;$$

à cause de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-m^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}$.

### 3$^{me}$ Problème.

*β étant une fonction de* x, c *une constante, changer l'intégrale*

$$\int_0^c dx \int_0^\beta f(x, y)\, dy$$

*en une autre dans laquelle la limite supérieure* c *soit réduite à l'unité.*

*Solution.* Pour $x = cz$, les limites $x = \begin{cases} c \\ 0 \end{cases}$, deviennent $z = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$;

de plus, la fonction $\beta$ de $x$, deviendra une fonction de $z$, que je nommerai $\gamma$; on aura :

$$\int_0^c dx \int_0^\beta f(x, y)\, dy = c \int_0^1 dz \int_0^\gamma f(cz, y)\, dy. \qquad (98)$$

### 4$^{me}$ Problème.

*Changer l'intégrale* $v = \displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\varphi(x)} f(x,y) dy$, *en une autre de la forme*

$$\int_0^1 dr \int_0^r F(x,r) dx.$$

*Solution.* Pour cela cherchez une fonction $\varphi(x, r)$ telle que l'on

ait : $\left.\begin{array}{l}\varphi(x,r)=1\text{, pour } r=1,\\ \varphi(x,r)=0\text{, pour } r=x,\end{array}\right\}$ $(\alpha)$

Alors l'intégrale $R=\int_0^r dx \int_0^{\varphi(x,r)} f(x,y)\,dy$, deviendra $v$, pour $r=1$.

Soit $\int_0^{\varphi(x,r)} f(x,y)dy=\psi(x,r)$, on aura, par (43),

$$(\beta) \qquad \frac{d\psi(x,r)}{dr}=f[x,\varphi(x,r)]\,\frac{d\varphi(x,r)}{dr}, \text{ et}$$

$$R=\int_0^r \psi(x,r)dx. \quad (\gamma)$$

Donc, en vertu de la formule (46) :

$$\frac{dR'}{dr}=\psi(r,r)\frac{dr}{dr}+\int_0^r \frac{d\psi(x,r)}{dr}\,dx. \quad (\delta).$$

Mais on a :

$$\psi(x,r)=\int_6^{\varphi(x,r)} f(x,y)dy;\ \text{donc}\ \psi(r,r)=\int_0^{\varphi(r,r)} f(x,y)dy;$$

donc, à cause de $(\alpha)$, $\psi(r,r)=\int_0^0 f(x,y)\,dy=0$; par là, et à cause de $(\beta)$, la formule $(\delta)$ devient :

$$\frac{dR}{dr}=\int_0^r f[x,\varphi(x,r)]\,\frac{d\varphi(x,r)}{dr}dx.$$

On tire de celle-ci :

$$R=\int dr\int_0^r f[x,\varphi(x,r)]\,\frac{d\varphi(x,r)}{dr}dx+C. \quad (\varepsilon)$$

Mais à cause de ($\gamma$), on a $R=0$, pour $r=0$, et, à cause de ($\alpha$), on a $R=v$, pour $r=1$. Donc, en intégrant ($\varepsilon$) entre les limites 0 et 1, on a :

$$v=\int_0^1 dr\int_0^r \mathrm{f}[x,\varphi(x,r)]\,\frac{d\varphi(x,r)}{dr}\,dx. \quad (93)$$

*Exemple.* Soit $V=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy.$

On fera $\varphi(x,r)=\sqrt{r^2-x^2}$, fonction qui jouit des propriétés ($\alpha$); il vient : $R=\int_0^r dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy.$ Mais $\int y\,dy=\frac{1}{2}y^2+C$;

donc $\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy=\frac{1}{2}(r^2-x^2)=\psi(x,r)$, $\frac{d\psi(x,r)}{dr}=r$. Par là :

$$\frac{dR}{dr}=\int_0^r r\,dx,\ dR=dr\int_0^r r\,dx,\ R=\int dr\int_0^r r\,dx;$$

$$V=\int_0^1 dr\int_0^r r\,dx,\quad \text{ou}\quad V=\int_0^1 r\,dr\int_0^r dx.\ \text{Mais}\int_0^r dx=r,$$

$$\text{donc } V=\int_0^1 r^2dr=\tfrac{1}{3}.$$

Pour la vérification, traitons directement l'intégrale

$$R=\int_0^r dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy.$$

$$\text{on a : } \int y\,dy=\tfrac{1}{2}y^2+C,\ \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy=\tfrac{1}{2}(r^2-x^2);$$

$$\int dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy=\tfrac{1}{2}\int(r^2-x^2)dx=\tfrac{1}{2}\int r^2dx-\tfrac{1}{2}\int x^2dx=\tfrac{1}{2}r^2x-\tfrac{1}{6}x^3+C.$$

$$\text{donc , } = \mathrm{R}\int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy = \tfrac{1}{2}\int_0^r r^2dx - \tfrac{1}{2}\int_0^r x^2dx$$

$$= \tfrac{1}{2}r^3 - \tfrac{1}{6}r^3 = \tfrac{1}{3}r^3.$$

Pour $r=1$, on a $\mathrm{R}=\mathrm{V}=\frac{1}{3}$.

## VIII.

## DU CHANGEMENT DE LA VARIABLE DANS LES INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES ET MULTIPLES.

Dans beaucoup de questions, et notamment dans celles où il s'agit de passer d'un système de coordonnées à un autre, au moyen de relations données, on est obligé de changer les variables de la fonction soumise aux intégrations ; il convient donc d'établir les transformations qui se rapportent à cet objet.

### 1er Problème.

*Introduire dans l'intégrale simple*

$$\int_a^b \mathrm{F(x)\,dx},$$

*à la place de* x*, la nouvelle variable* $\xi$*, liée à la première, par l'équation implicite :*

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\xi)=0.$$

*Solution.* Des équations $\mathrm{f}(a,\xi)=0$, $\mathrm{f}(b,\xi)=0$, on tire $\xi=\varphi(a)$, $\xi=\psi(b)$ ; donc aux limites de la proposée $x=\left\{\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right.$, répondront les limites de la transformée, $\xi=\left\{\begin{matrix} \psi(b) \\ \varphi(a) \end{matrix}\right.$. De plus, comme on a :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{d\xi}\right)d\xi = 0,$$

il vient :

$$dx = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{d\xi}\right)}\,d\xi.$$

De l'équation $f(x,\xi)=0$, on tire : $x=\chi(\xi)$ ; on a donc :

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\psi(b)} F[\chi(\xi)] + -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{d\xi}\right)}\,d\xi. \quad (94)$$

### 2me Problème.

*Introduire dans l'intégrale double*

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b F(x,y)dx\,, \quad (\alpha)$$

*à la place de* x *et de* y, *deux nouvelles variables* $\xi$, $\eta$, *liées aux premières, par les équations :*

$$x=\varphi(\xi,\eta)\,,\ \ y=\psi(\xi,\eta). \quad (\beta).$$

*Solution.* A cause des équations ($\beta$) il vient :

$a=\varphi(\xi,\eta)$, $b=\varphi(\xi,\eta)$, d'où $\xi=\chi(a)$, $\xi=\chi(b)$,
$\alpha=\psi(\xi,\eta)$, $\beta=\psi(\xi,\eta)$, » $\eta=\theta(\alpha)$, $\eta=\theta(\beta)$ ;

par conséquent, aux limites $x=\left\{\right.$ , répondent les limites

$$\xi = \left\{ \begin{matrix} \chi(b) \\ \\ \chi(a) \end{matrix} \right. ;$$

et aux limites $y=\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha \end{matrix} \right.$ , répondent $\eta=\left\{ \begin{matrix} \theta(\beta) \\ \theta(\alpha) \end{matrix} \right.$ ;

il ne s'agit plus que de déterminer $dx$ et $dy$ en fonction des nouvelles variables, et de leurs différentielles.

A cet effet, observons que la variable $\eta$, dans l'intégrale transformée, représente la variable $x$ dans l'intégrale primitive. Mais dans celle-ci, la 1re intégration doit être effectuée par rapport à $x$, et alors $y$ est constant; donc, dans la transformée, la 1re intégration doit se faire par rapport à $\xi$, et alors $\eta$ est constant. Les équations $(\beta)$ donnent :

$$\left.\begin{aligned} dx &= \left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)d\xi + \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)d\eta, \\ 0 &= \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)d\xi + \left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)d\eta, \end{aligned}\right\} \quad (95)$$

car $dy=0$, puisque dans la 1re intégration $y$ est constant. En tirant de la 2me de ces équations la valeur de $d\eta$ pour la substituer dans la 1re, on trouve :

$$dx = \frac{\left[\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right) - \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)\right]}{\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)} . d\xi. \quad (96)$$

Dans l'intégration par rapport à $y$, $x$, et par conséquent $\xi$, étant constants, on tire de la 2de des équations $(\beta)$ :

$$dy = \left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)d\eta. \quad (97)$$

On a donc, par toutes ces expressions réunies :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b \mathrm{F}(x,y)\,dx$$

$$= \int_{\theta(\alpha)}^{\theta(\beta)} \left(\frac{d\psi}{d\eta}\right) d\eta \int_{\chi(a)}^{\chi(b)} \mathrm{F}[\varphi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta)] \frac{\left[\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right) - \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)\right]}{\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)} d\xi$$

$$= \int_{\theta(a)}^{\theta(\beta)} d\eta \int_{\chi(a)}^{\chi(b)} \mathrm{F}[\varphi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta)] \left[\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right) - \left(\frac{d\varphi}{a\eta}\right)\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)\right] d\xi. \quad (98)$$

*Exemple.* Soit à transformer en coordonnées polaires la formule générale de la planification des surfaces :

$$S = \int_a^\beta dx \int_a^b dy \sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2}.$$

$a$ et $b$ sont des fonctions de $x$.

Les formules pour la transformation des coordonnées polaires sont :

$$x = r \cos \xi \cos \eta\,,\ \ \eta = r \cos \xi \sin \eta\,,\ \ z = r \sin \xi\,;$$

$r$ est une fonction de $\xi, \eta$. Si nous fesons abstraction des limites, nous avons ici :

$$\int dy \int F(x,y) dx = \iint F(x,y) dx dy$$

$$= \iint \sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dx}{dy})^2}\, dx dy\,;$$

par suite, $F(x,y) = \sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2}$. Il faut donc, en conformité de (98), chercher les valeurs de

$$T = (\frac{d\varphi}{d\xi})(\frac{d\psi}{dy}) - (\frac{d\varphi}{d\eta})(\frac{d\psi}{d\eta})\,,\ \text{et de}$$

$$k = F[\varphi(\xi,\eta),\ \psi(\xi,\eta)].$$

### 1° *Détermination de* T.

Comme on a ;

$$x = \varphi(\xi,\eta) = r \cos \xi \cos \eta,\ \ y = \psi(\xi,\eta) = r \cos \xi \sin \eta\,,$$

il vient :

$$(\frac{d\varphi}{d\xi}) = (\frac{dx}{d\xi}) = \cos \eta\, [\cos \xi\, (\frac{dr}{d\xi}) - r \sin \xi]\,,$$

$$(\frac{d\varphi}{d\eta}) = (\frac{dx}{d\eta}) = \cos \xi\, [\cos \eta\, (\frac{dr}{d\eta}) - r \sin \eta]\,,$$

$$(\frac{d\psi}{d\xi}) = (\frac{dy}{d\xi}) = \sin \eta\, [\cos \xi\, (\frac{dr}{d\xi}) - r \sin \xi]\,,$$

$$\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)=\left(\frac{dy}{d\eta}\right)=\cos\xi\left[\sin\eta\left(\frac{dr}{d\eta}\right)+r\cos\eta\right],$$

d'où :

$$T=\left(\frac{dx}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{d\eta}\right)-\left(\frac{dx}{d\eta}\right)\left(\frac{dy}{d\eta}\right)=r\left[\left(\frac{dr}{d\xi}\right)\cos\xi-r\cos\xi\right]\cos\xi. \quad (\alpha)$$

2° *Détermination de* k.

Comme on a $F(x,y)=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$, il faut, pour trouver $k$, exprimer $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, en fonction de $\xi$, et de $\eta$. Pour cela, $z$ étant une fonction de $x$ et de $y$, et par suite de $\xi$ et $\eta$, on a :

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\xi}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\xi}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{d\eta}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\eta}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\eta}\right);$$

équations qu'il faudra résoudre par rapport à $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

Comme on a :

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)=\sin\xi\left(\frac{dr}{d\xi}\right)+r\cos\xi,\ \left(\frac{dz}{d\eta}\right)=\sin\xi\left(\frac{dr}{d\eta}\right);$$

en fesant :

$$V=\left(\frac{dz}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{d\eta}\right)-\left(\frac{dz}{d\eta}\right)\left(\frac{dy}{d\xi}\right)$$

$$=r\left(\frac{dr}{d\eta}\right)\sin\eta+r\left[\left(\frac{dr}{d\xi}\right)\sin\xi+r\cos\xi\right]\cos\xi\cos\eta,$$

$$U=\left(\frac{dz}{d\eta}\right)\left(\frac{dx}{d\xi}\right)-\left(\frac{dz}{d\xi}\right)\left(\frac{dx}{d\eta}\right)$$

$$=-r\left(\frac{dr}{d\eta}\right)\cos\eta+r\left[\left(\frac{dr}{d\xi}\right)\sin\xi+r\cos\xi\right]\cos\xi\sin\eta,$$

on aura :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{V}{T},\ \left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{U}{T},$$

$$U^2 + V^2 + T^2 = r^2[(\frac{dr}{d\eta})^2 + (\frac{dr}{d\xi})^2\cos^2\xi + r^2\cos^2\xi];$$

donc :

$$k = \sqrt{1 + \frac{V^2}{T^2} + \frac{U^2}{T^2}} = \frac{1}{T}\sqrt{T^2 + U^2 + V^2}$$

$$= \frac{1}{T} r \sqrt{(\frac{dr}{d\eta})^2 + (\frac{dr}{d\xi})^2\cos^2\xi + r^2\cos^2\xi}.$$

En substituant ces valeurs dans l'intégrale

$$\int\int k T \, d\eta \, d\xi,$$

il vient :

$$\int\int dxdy \sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2}$$

$$= \int\int r \, d\xi \, d\eta \sqrt{(\frac{dr}{d\eta})^2 + [r^2 + (\frac{dr}{d\xi})^2]\cos^2\xi}, \quad (99)$$

et il n'y aura plus qu'à déterminer les limites qui, dans les intégrales du 2[d] membre, doivent répondre aux limites $\alpha, \beta$; $a, b$ des intégrales du 1[er].

### 3[me] Problème.

*Introduire dans l'intégrale triple*

$$\int_\gamma^\delta dz \int_\alpha^\beta dy \int_a^b F(x, y, z) dx = \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta \int_a^b F(x, y, z) \, dxdydz,$$

*à la place de* x, y, z, *respectivement les nouvelles variables* $\xi, \eta, \zeta$, *liées aux premières par les équations*

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \; y = \psi(\xi, \eta, \zeta), \; z = \chi(\xi, \eta, \zeta). \quad (\alpha)$$

*Solution.* Fesons, pour un moment, abstraction des limites,

et soit $\int\int\int F(x,y,z) \, dxdydz = \int\int\int f(\xi, \eta, \zeta) d\xi, d\eta, d\zeta. \quad (\beta)$

Les intégrales du 1[er] membre devront s'effectuer successivement par rapport à $x$, $y$ et $z$, et par conséquent celles du second dans l'ordre marqué par les lettres $\xi$, $\eta$ et $\zeta$. Pour réaliser la

transformation indiquée, on devra d'abord poser

$$F(x,y,z)=F[\varphi(\xi,\eta,\zeta),\ \psi(\xi,\eta,\zeta),\ \chi(\xi,\eta,\zeta)],$$

et ensuite obtenir pour $dx$, $dy$, $dz$, respectivement leurs expressions en $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$.

### 1° *Exprimer* dx *en fonction de* dξ.

Comme la 1<sup></sup>re des trois intégrations du 1er membre de $(\beta)$ doit se faire par rapport à $x$, on devra regarder $y$ et $z$ comme constants, et dans cette hypothèse les équations $(\alpha)$ donnent :

$$dx=\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)d\xi+\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)d\eta+\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)d\zeta,$$

$$0=\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)d\xi+\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)d\eta+\left(\frac{d\psi}{d\zeta}\right)d\zeta,$$

$$0=\left(\frac{d\chi}{d\xi}\right)d\xi+\left(\frac{d\chi}{d\eta}\right)d\eta+\left(\frac{d\chi}{d\zeta}\right)d\zeta.$$

Pour avoir $dx$, en fonction de $d\xi$ seul, il faudra éliminer $d\eta$, $d\zeta$; à cet effet posons :

$$a_0=\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right),\ b_0=\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right),\ c_0=\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right),$$

$$a_1=\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right),\ b_1=\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right),\ c_1=\left(\frac{d\psi}{d\zeta}\right),$$

$$a_2=\left(\frac{d\chi}{d\xi}\right),\ b_2=\left(\frac{d\chi}{d\eta}\right),\ c_2=\left(\frac{d\chi}{d\zeta}\right),$$

Les équations précédentes deviennent :

$$a_0\,d\xi+b_0\,d\eta+c_0\,d\zeta=dx,$$

$$a_1\,d\xi+b_1\,d\eta+c_1\,d\zeta=0,$$

$$a_2\,d\xi+b_2\,d\eta+c_2\,d\zeta=0.$$

Or, en fesant, pour abréger,

$$a_0b_1c_2-a_0b_2c_1+a_1b_2c_0-a_1b_0c_2+a_2b_0c_1-a_2b_1c_0=\Sigma(a_0b_1c_2),$$

on trouve :

$$dx=\frac{\Sigma(a_0b_1c_2)}{b_1c_2-b_2c_1}d\xi=\frac{\Sigma\left[\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\cdot\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)\cdot\left(\frac{d\chi}{d\zeta}\right)\right]}{b_1c_2-b_2c_1}\cdot d\xi.\quad(\gamma)$$

2° *Exprimer* dy *en fonction de* d$\eta$.

La 2$^{me}$ intégration devant se faire par rapport à $y$, on regardera $x$ et $z$ comme constants, et dans cette hypothèse, les deux dernières des équations ($\alpha$) donnent :

$$dy = (\frac{d\psi}{d\xi})d\eta + (\frac{d\psi}{d\zeta})d\zeta,$$

$$0 = (\frac{d\chi}{d\eta})d\eta + (\frac{d\chi}{d\zeta})d\zeta;$$

ou,
$$dy = b_1\, d\eta + c_1\, d\zeta,$$
$$0 = b_2\, d\eta + c_2\, d\zeta;$$

d'où, en éliminant $d\zeta$,

$$dy = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_2} d\eta. \quad (\delta)$$

3° *Exprimer* dz *en fonction de* d$\zeta$.

La 3$^{me}$ des équations ($\alpha$) donne :

$$dz = (\frac{d\chi}{d\zeta})d\zeta,$$

ou,
$$dz = c_3 \cdot d\zeta. \quad (\varepsilon)$$

Cela posé, les valeurs ($\gamma$), ($\delta$), ($\varepsilon$) donnent, par la multiplication :

$$dxdydz = d\xi\, d\eta\, d\zeta \cdot \Sigma(\frac{d\varphi}{d\xi} \cdot \frac{d\psi}{d\eta} \cdot \frac{d\chi}{d\zeta});$$

on a donc enfin :

(100) $$\iiint F(x,y,z)$$

$$= \iiint F[\varphi(\xi,\eta,\zeta), \psi(\xi,\eta,\zeta), \chi(\xi,\eta,\zeta)] \cdot \Sigma(\frac{d\varphi}{d\xi} \cdot \frac{d\psi}{d\eta} \cdot \frac{d\chi}{d\zeta}) d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta;$$

et il n'y aura plus qu'à déterminer les limites.

A cet effet, on a, dans la 1$^{re}$ intégration,

pour $x = a$, $a = \varphi(\xi,\eta,\zeta)$, d'où $\xi = f(a)$,
» $x = b$, $b = \varphi(\xi,\eta,\zeta)$, » $\xi = f(b)$;

Dans la 2$^{me}$ intégration on a :

$$\text{pour } y=\alpha,\ \alpha=\psi[f(a),\eta,\zeta], \quad \text{d'où : } \quad \eta=f_1(\alpha),$$

$$\text{» } \ y=\beta,\ \beta=\psi[f(a),\eta,\zeta], \quad \text{»} \quad \eta=f_1(\beta).$$

Dans la 3$^{me}$ intégration on a :

$$\text{pour } z=\gamma,\ \gamma=\chi[f(a),f_1(\alpha),\zeta], \quad \text{d'où : } \quad \zeta=f_2(\gamma),$$

$$\text{» } \ z=\delta,\ \delta=\chi[f(a),f_1(\alpha),\zeta], \quad \text{»} \quad \zeta=f_2(\delta).$$

*Exemple.* Prenons la formule de la cubature

$$S=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta dy\int_\gamma^\delta z,$$

dans laquelle $\gamma$ et $\delta$ sont des fonctions de $x,y$; $\alpha$ et $\beta$ des fonctions de $x$; $a$ et $b$ des constantes. Il s'agit de trouver la même expression pour le cas des coordonnées polaires. A cet effet, on a les équations :

$$x=\varphi(\xi,\eta,\zeta)=r\cos\xi\cos\eta,$$

$$y=\psi(\xi,\eta,\zeta)=r\cos\xi\sin\eta,$$

$$z=\chi(\xi,\eta,\zeta)=r\sin\xi;$$

équations dans lesquelles il faudra faire $\zeta=r$.

On a ici :

$$\Sigma\left[\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\cdot\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)\cdot\left(\frac{d\chi}{d\zeta}\right)\right]=\Sigma\left[\left(\frac{dx}{d\xi}\right)\cdot\left(\frac{dy}{d\eta}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dr}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{dx}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{d\eta}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)-\left(\frac{dx}{d\xi}\right)\left(\frac{dz}{d\eta}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right)$$

$$+\left(\frac{dy}{d\xi}\right)\left(\frac{dz}{d\eta}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right)-\left(\frac{dy}{d\xi}\right)\left(\frac{dx}{d\eta}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)$$

$$+\left(\frac{dz}{d\xi}\right)\left(\frac{dx}{d\eta}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right)-\left(\frac{dz}{d\xi}\right)\left(\frac{dy}{d\eta}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right)=r^2\cos\xi;$$

d'où :

$$(101)\quad \int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz$$

$$=\int\!\!\int\!\!\int r^2\cos\xi\,d\xi\,d\eta\,dr=\int\cos\xi\,d\xi\int d\eta\int r^2dr;$$

où il n'y aura plus qu'à déterminer les limites.

*Remarque.* Les problèmes précédents suffisent pour faire con-

naitre la marche à suivre dans les cas, où il y aurait à transformer des intégrales multiples de plus de 3 signes d'intégration. Il serait même facile d'obtenir la formule générale; mais nous renvoyons pour cet objet à un Mémoire de Cauchy, publié dans les *Exercices d'analyses*, 1847, pag. 128.

## IX.

## PRINCIPES GÉNÉRAUX POUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES MULTIPLES.

Lorsqu'on a une intégrale définie multiple, pour en déterminer la valeur, il faut d'abord la réduire, s'il est possible, en une expression composée d'un nombre d'intégrales moindre; c'est ce qu'on entend par *réduction* d'une intégrale multiple. Pour cela, il faut substituer aux limites variables, des limites constantes, afin de pouvoir intervertir l'ordre des intégrations. Mais le moyen le plus puissant de réduction, consiste dans la séparation des variables. En effet, quand les variables sont séparées, l'intégrale proposée se réduit à un produit de plusieurs intégrales simples. Pour le démontrer soit l'intégrale multiple

$$\int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(x)dy \int_e^f \mathrm{f}(z)dz \;\ldots, \qquad (\alpha)$$

dans laquelle les variables sont séparées.

Soient

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \mathrm{P}\,,\ \int_c^d \psi(y)dy = \mathrm{Q}\,,\ \int_e^f \mathrm{f}(z)dz = \mathrm{R}\,,\ \text{etc.},$$

on aura :

$$\int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(y)dy \cdot \int_e^f \mathrm{f}(z)dz \;\ldots = \int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(y)dy \cdot \mathrm{R} \;\ldots$$

et comme R ne contient aucune des variables $x, y$, etc., on a :

$$\int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(x)dy \int_e^f \mathrm{f}(z)dz \;\ldots = \mathrm{R}\cdot \int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(y)dy \;\ldots$$

On trouvera de même :

$$\int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(y)dy \ \ldots = \int_a^b \phi(x)dx \ \ldots \mathrm{Q} = \mathrm{Q} \cdot \int_a^b \varphi(x)dx \ \ldots,$$

$$\int_a^b \varphi(x)dx \ \ldots = \mathrm{P}. \ \ldots$$

etc.

D'où, enfin :

$$\int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d \psi(x)dy \int_e^f \mathrm{f}(z)dz \ \ldots = \mathrm{P} \cdot \mathrm{Q} \cdot \mathrm{R} \ \ldots$$

Les ressources pour opérer la séparation des variables, consistent principalement dans l'inversion des intégrales, et dans des substitutions convenables de nouvelles variables à la place des anciennes. L'inversion des intégrales, pour qu'elle soit possible, exige des limites constantes ; donc si elles sont variables, le moyen le plus général pour les rendre constantes, consiste dans l'introduction d'un facteur P, jouissant des propriétés mentionnées dans le 11[me] problème du § II. Nous reviendrons sur cet objet dans le 3[me] livre.

FIN DU PREMIER LIVRE.

## II$^{me}$ LIVRE.

—

# DIVERSES MÉTHODES

POUR LA

# DÉTERMINATION DE LA VALEUR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

### 1$^{re}$ MÉTHODE.

*Détermination des intégrales définies par la formule* (8).

$$\int_a^b f(x)dx = da[\,f(a) + f(a+da) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,da)\,],$$

$$b = a + nda.$$

### 1$^{er}$ EXEMPLE.

*Déterminer la valeur de l'intégrale* $\int_a^b \mathrm{xdx}$.

On a ici $f(x) = x$, donc

$$\int_a^b xdx = da[a + a + da + a + 2da + \ldots + a + \overline{n-1}\,da],$$

$$= da\,[a + a + \overline{n-1}\,da]\,\frac{n}{2},$$

$$= [a + b - da]\,\frac{b-a}{2},$$

$$= \frac{(a+b)(b-a)}{2} - \frac{(b-a)da}{2},$$

$$= \tfrac{1}{2}(b+a)(b-a) = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

2$^{me}$ Exemple.

*Déterminer la valeur de l'intégrale* $\int_a^b A^x dx$.

Comme on a $f(x) = A$, il vient :

$$\int_a^b A^x dx = da\,[A^a + A^{a+da} + A^{a+2da} + \ldots A^{a+\overline{n-1}da}],$$

$$= A^a da\,[1 + A^{da} + A^{2da} + \ldots + A^{\overline{n-1}\,da}],$$

$$= A^a da \cdot \frac{A^{nda} - 1}{A^{da} - 1} = \frac{da}{A^{da} - 1}\,[A^{a+nda} - A^a]$$

$$= \frac{da}{A^{da} - 1}\,[A^b - A^a].$$

Mais on a :

$$A^{da} = e^{da\,lA} = 1 + da\,lA\,;$$

donc $A^{da} - 1 = da\,lA$, et $\frac{da}{A^{da} - 1} = \frac{1}{lA}$;

d'où, enfin :

$$\int_a^b A^x dx = \frac{A^b - A^a}{lA}.$$

*Remarque.* Cette méthode exige, comme auxiliaires, les règles pour la sommation des suites.

## 2$^{me}$ Méthode.

*Détermination de la valeur des intégrales définies par la formule* (37).

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \int f(x)dx = F(x) + C;$$

$F(x)$ est une fonction continue entre $a$ et $b$.

### 1$^{er}$ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale* $\int_0^1 bx^{a-1}dx$.

On a : $\int bx^{a-1}dx = \frac{bx}{a} + c$, d'où : $\int_0^1 bx^{a-1}dx = \frac{b}{a}$.

*Corollaire.* $\int_0^1 (A + Bx + Cx^2 + \dots) = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \text{etc.}$

$$\int_0^1 \frac{x^m - 1}{x - 1}dx = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \text{etc.} + \frac{1}{m}.$$

### 2$^{me}$ Exemple.

*Chercher les valeurs des intégrales*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+m^2)}, \int_0^1 \frac{bdx}{a+bx}, \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

On a : $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arc tg}\frac{x}{a} + c$, $\int \frac{xdx}{x^2+m^2} = \frac{1}{2}l(x^2+m^2) + c$,

$$\int \frac{bdx}{a+bx} = l(a+bx) + c, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x + c;$$

donc : $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{2}{a} \text{ arc tg } \infty = \frac{\pi}{a}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+m^2} = \int_{-\frac{1}{da}}^{\frac{1}{da}} \frac{xdx}{x^2+m^2} = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1}{da^2}+m^2\right)$$

$$-\tfrac{1}{2} l\left(\frac{1}{da}+m^2\right) = l\left(\frac{da}{da}\right) = l(1) = 0.$$

$$\int_{0}^{1} \frac{bdx}{a+bx} = l\left(\frac{a+b}{a}\right).$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } \infty = \frac{\pi}{2}.$$

*Corollaire.* $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)+\beta^2} = \frac{\pi}{\beta}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = 0.$$

### 3^me^ Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales définies*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-a-\beta\sqrt{-1}} + \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right] dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx,$$

$$F(x) = [x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1}\,][x-\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}\,]$$
$$\times [x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1}\,][x-\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}\,] \times \ldots$$

1° On a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2A(x-\alpha)+2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right) dx\,,$$

$$= 2A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2} + 2B\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,,$$

$$= 2B\beta \times \frac{\pi}{\beta} = 2\pi B. \quad (1)$$

2° On a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A_1 - B_1\sqrt{-1}}{x_1-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1}} + \frac{A_1+B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}}\right] dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A_2 - B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1}} + \frac{A_2+B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}}\right] dx$$

$$+ \text{etc.}$$

$$= 2\pi B_1 + 2\pi B_2 + \text{etc.}$$

$$= 2\pi (B_1 + B_2 + \text{etc.}) \quad (2)$$

### 4^me^ Exemple.

*Chercher les valeurs des intégrales*

$$\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,,\ \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,,\ \int_0^a \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,.$$

On a :

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{a} + C\,,$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc}\cos\frac{x}{a} + C\,;$$

donc :

$$\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\,,$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^a \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\pi}{2}.$$

*Corollaire.* Pour $a=1$, il vient :

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1\,,\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

5^me^ EXEMPLE.

*Chercher la valeur des intégrales définies*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ax\,dx\,,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ax\,dx\,,$$

*a étant un nombre entier et positif.*

On a :

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C\,,\quad \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C\,;$$

Pour $a=4n$, il vient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ax\,dx = 0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ax\,dx = 0$,

$a=4n+1$, » » $=\frac{1}{4n+1}$, » $=\frac{1}{4n+1}$,

$a=4n+2$, » » $=\frac{2}{4n+2}$, » $=0$,

$a=4n+3$, » » $=\frac{1}{4n+3}$, » $=-\frac{1}{4n+3}$,

*Corollaire.* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx=1, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx=1$

Si on remplaçait $\frac{\pi}{2}$ par $\infty$, la valeur de ces intégrales serait indéterminée, et l'on aurait :

$$\int_0^{\infty} \sin x dx=\frac{0}{0}, \int_0^{\infty} \cos x dx=\frac{0}{0}.$$

6^me^ Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales définies*

$$\int_0^1 a^{mx} la dx, \int_0^{\infty} \frac{dx}{x}, \int_0^{\infty} e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx.$$

On a :

$$\int a^{mx} la dx=\frac{1}{m}a^{mx}+\mathrm{C}, \quad \int \frac{dx}{x}=lx+\mathrm{C},$$

$$\int e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx=-\frac{e^{-(a+b\sqrt{-1})x}}{a+b\sqrt{-1}}+\mathrm{C}.$$

donc :

$$\int_0^1 a^{mx} la dx=\frac{1}{m}(a^m-1),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}=\int_{da}^{\frac{1}{da}} \frac{dx}{x}=l(\frac{1}{da})-l(da)=l(\frac{1}{da^2})=l(\infty)=\infty,$$

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{a-b\sqrt{-1}}{a^2+b^2}. \qquad (3)$$

*Corollaire.* $\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$, $\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$, $\int_0^\infty e^{ax}dx = \infty$,

$$\int_0^\infty e^{-bx\sqrt{-1}} = \frac{1}{b\sqrt{-1}} = -\frac{\sqrt{-1}}{b}.$$

### 3me Méthode.

*Détermination de la valeur des intégrales définies par substitution.*

Dans cette méthode on substitue à la place de la variable primitive, une autre liée à la première au moyen d'une relation donnée; cette transformation a pour objet de faire dépendre l'intégrale donnée d'une autre qu'on connait, ou dont la valeur soit plus facile à obtenir.

### Exemple.

*Étant donné*

$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = A$, *trouver* $\int_{-\infty}^\infty f(x+a)dx$, $\int_0^\infty f(ax)dx$.

Si l'on pose dans la 1re intégrale $x+a=z$, et dans la 2de $ax=z$, on a :

$$\int_{-\infty}^\infty f(x+a)dx = \int_{-\infty}^\infty f(z)dz = A.$$

$$\int_0^\infty f(ax)dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(z)dz = \frac{A}{a}.$$

*Corollaire.* Soient

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,\quad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx = \Gamma(\mu),\quad \int_0^\infty \frac{\sin x dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

On a :

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,,\quad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin axdx}{x} = \frac{\pi}{2}. \qquad (4)$$

### 4$^{me}$ Méthode.

*Détermination de la valeur des intégrales définies, par des différentiations successives.*

Dans cette méthode on obtient la valeur des intégrales définies, en différentiant d'autres intégrales définies connues, plusieurs fois de suite par rapport à une constante.

### 1$^{er}$ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}.$$

Pour cela, différentions l'intégrale connue

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\,,$$

$n$ fois de suite par rapport à la constante $a$ ; il vient :

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{da^n}\,,$$

ou, à cause de la formule (45),

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{d^n\left(\frac{1}{x^2+a}\right)}{da^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{da^n}.$$

Donc, en effectuant les différentiations indiquées, on trouve :

$$\int_0^\infty (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n dx}{(x^2+a)^{n+1}} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\pi}{2^{n+1} a^n \sqrt{a}};$$

d'où l'on tire enfin :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)\pi}{1 \cdot 2 \ldots n \cdot 2^{n+1} a^{n+\frac{1}{2}}}. \qquad (5)$$

## 2$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx.$$

Pour cela, différentions l'intégrale connue

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

$n$ fois de suite par rapport à $a$, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{d^n \cdot e^{-ax}}{da^n} dx = \frac{d^n\left(\frac{1}{a}\right)}{da^n}.$$

En effectuant les différentiations indiquées, on obtient :

$$\int_0^\infty (-1)^n x^n e^{-ax} dx = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{a^{n+1}};$$

d'où l'on tire :

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{a^{n+1}}. \qquad (6)$$

*Corollaire.* Pour $a=1$, il vient :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \qquad (7)$$

### 3^me Exemple.

En différentiant $n$ fois de suite par rapport à $b$, les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+\frac{b}{x^2})} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a^2x^2+bx)\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} (1+\sqrt{-1}) e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx)\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} (1-\sqrt{-1}) e^{\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(ax^2+\frac{b}{x^2})\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} (1+\sqrt{-1}) e^{+2\sqrt{ab}\sqrt{-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+\frac{b}{x^2})\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} (1-\sqrt{-1}) e^{-2\sqrt{ab}\sqrt{-1}}.$$

On en déduit respectivement :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2-bx} dx = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{d^n e^{\frac{b^2}{4a}}}{db^n}$$

$$= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{b}{2a}\right)^n e^{\frac{b^2}{4a}} \left[1 + \frac{n(n-1)}{1} \frac{a}{b^2} \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \frac{a^2}{b^4} + \dots\right], \qquad (7^{\text{I}})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + \frac{b}{x^2})} \frac{dx}{x^{2n}} = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{d^n e^{-2\sqrt{ab}}}{db^n}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-2\sqrt{ab}} \left[1 + \frac{n(n-1)}{1} \frac{1}{4\sqrt{ab}} \right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{4\sqrt{ab}}\right)^2 + \dots\right], \qquad (7^{\text{II}})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{(ax^2+bx)\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^n} \cdot \frac{d^n e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}}}{db^n}.$$

$$= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2a}} (1+\sqrt{-1}) \left(\frac{b}{2a}\right)^n e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}} \left[1 + \frac{n(n-1)}{1} \frac{a}{b^2} \sqrt{-1} \right.$$

$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \frac{a^2}{b^4} - \text{etc.}\right], \qquad (7^{\text{III}})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-(ax^2+bx)\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \frac{1-\sqrt{-1}}{(-1\sqrt{-1})^n} \cdot \frac{d^n e^{\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}}}{ab^n}$$

$$= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2a}} (1-\sqrt{-1}) \left(\frac{b}{2a}\right)^n e^{\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}} \left[1 - \frac{n(n-1)}{1} \frac{a}{b^2} \sqrt{-1} \right.$$

$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \frac{a^2}{b^4} + \dots\right], \qquad (7^{\text{IV}})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(ax^2+\frac{b}{x^2})\sqrt{-1}}\frac{dx}{x^{2n}}=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,\frac{1+\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^n}\cdot\frac{d^n e^{2\sqrt{-ab}}}{db^n}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cdot(1+\sqrt{-1})\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{2\sqrt{-ab}}\Big[1+\frac{n(n-1)}{1}\,\frac{1}{4\sqrt{ab}}\sqrt{-1}$$

$$-\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{4\sqrt{ab}}\right)^2-\text{etc.}\Big], \quad (7^{\text{v}})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+\frac{b}{x^2})\sqrt{-1}}\frac{dx}{x^{2n}}=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cdot\frac{1-\sqrt{-1}}{(-\sqrt{-1})^n}\cdot\frac{d^n e^{-2\sqrt{-ab}}}{db^n}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cdot(1-\sqrt{-1})\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-2\sqrt{-ab}}\Big[1-\frac{n(n-1)}{1}\,\frac{1}{4\sqrt{ab}}\sqrt{-1}$$

$$-\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{4\sqrt{ab}}\right)^2+\dots\Big], \quad (7^{\text{vI}})$$

### 5me Méthode.

*Détermination de la valeur des intégrales définies par des intégrations successives.*

Cette méthode consiste à déterminer, par des intégrations successives, les valeurs des intégrales doubles

$$\int_{\alpha}^{\beta} dr\int_{a}^{b} \mathrm{f}(x,r)dx = \mathrm{A},$$

$$\int_{a}^{b} dx\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f}(x,r)\,dr = \int_{a}^{b}\varphi(x)dx,$$

d'où l'on conclut, en vertu de la formule (65)

$$\int_{a}^{b}\varphi(xdx)=\mathrm{A}. \quad (8)$$

Cette méthode exige que $f(x,r)$ reste continues pour toutes les valeurs de $x$, comprises entre $a$ et $b$, et pour toutes les valeurs de $r$ situées entre $\alpha$ et $\beta$.

Si la fonction $f(x,r)$ était discontinue entre les mêmes limites, on aurait par la formule (67) :

$$\int_\alpha^\beta dr \int_a^b f(x,r)\,dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,r)dr + \Delta,$$

$$\Delta = \int_\alpha^\beta dr \int_{c-dc}^{c+dc} f(x,r)dx\,;$$

$x=c$, est la valeur de $x$, pour laquelle la fonction $f(x,r)$ est discontinue. Par conséquent la formule (8) devient :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = A - \Delta. \qquad (9)$$

1[er] Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{xlx}\,dx,$$

*l désignant des logarithmes népériens.*

On a, 1°

$$\int x^{\mu-1}dx = \frac{1}{\mu}\,x^\mu + c, \quad \int_0^1 x^{\mu-1}dx = \frac{1}{\mu},$$

$$\int d\mu \int_0^1 x^{\mu-1}dx = \int \frac{d\mu}{\mu} = l(\mu) + c,$$

$$\int_\nu^\mu d\mu \int_0^1 x^{\mu-1}dx = \int_\nu^\mu \frac{d\mu}{\mu} = l\left(\frac{\mu}{\nu}\right). \quad (\alpha)$$

On a, 2° :

$$\int x^{\mu-1}d\mu = \frac{x^{\mu-1}}{lx} = \frac{x^{\mu}}{xlx} + c, \int_{\nu}^{\mu} x^{\mu-1}d\mu = \frac{x^{\mu}-x^{\nu}}{xlx};$$

$$\int dx \int_{\nu}^{\mu} x^{\mu-1}d\mu = \int \frac{x^{\mu}-x^{\nu}}{xlx}dx$$

$$\int_{0}^{1} dx \int_{\nu}^{\mu} x^{\mu-1}d\mu = \int_{0}^{1} \frac{x^{\mu}-x^{\nu}}{xlx}dx. \qquad (\beta)$$

Les premiers membres de ($\alpha$), ($\beta$) sont égaux; car $\nu$, $\mu$ étant positifs, la fonction $x^{\mu-1}$, ne devient infinie pour aucune valeur de $x$ comprise entre 0 et 1, ni pour aucune valeur $\mu$, comprise depuis $x=\nu$, jusqu'à $x=\mu$. On a donc par (8) :

$$\int_{0}^{1} \frac{x^{\mu}-x^{\nu}}{xlx}dx = l\left(\frac{\mu}{\nu}\right). \qquad (10)$$

### 2me Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}dx$$

a *et* c *sont des nombres positifs.*

On a 1° :

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a};$$

d'où : $$\int da \int_{0}^{\infty} e^{-ax}dx = \int \frac{da}{a} = la + c;$$

$$\int_c^a da \int_0^\infty e^{-ax} dx = l\left(\frac{a}{c}\right). \qquad (\alpha)$$

On a 2° :

$$\int e^{-ax} da = -\frac{1}{x} e^{-ax} + c\,,$$

donc, $\displaystyle\int_c^a e^{-ax} da = \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x}$,

d'où : $\displaystyle\int_0^\infty dx \int_c^a e^{-ax} da = \int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} dx. \qquad (\beta)$

Donc, à cause de (8) :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-cx}}{x} \cdot dx = l\left(\frac{a}{c}\right). \qquad (11)$$

### 3$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales définies*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \cos bx dx\,, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \sin bx dx.$$

On a 1° : $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}}$ ;

d'où : $\displaystyle\int da \int e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \int \frac{da}{a+b\sqrt{-1}}$

$$= l(a+b\sqrt{-1}) + c.$$

Donc $\int_c^a da \int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = l(a+b\sqrt{-1}) - l(c+b\sqrt{-1})$,

$$= \tfrac{1}{2} l\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\right) - \sqrt{-1}\left(\text{arc tg}\frac{b}{c} - \text{arc tg}\frac{b}{a}\right). \qquad (\alpha)$$

On a 2° : $\int e^{-(a+b\sqrt{-1})x} da = -\dfrac{e^{-(a+b\sqrt{-1})x}}{x} + c$,

$$\int_c^a e^{-(a+b\sqrt{-1})x} da = \frac{e^{-(c+b\sqrt{-1})x} - e^{-(a+b\sqrt{-1})x}}{x},$$

d'où :

$$\int_0^\infty dx \int_c^a e^{-(a+b\sqrt{-1})x} da = \int_0^\infty \frac{e^{-(c+b\sqrt{-1})x} - e^{-(a+b\sqrt{-1})x}}{x} \cdot dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} e^{-bx\sqrt{-1}} dx. \qquad (\beta$$

Les équations ($\alpha$, ($\beta$, donnent :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \cdot e^{-bx\sqrt{-1}} dx$$

$$= \tfrac{1}{2} l \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2} - \sqrt{-1}\left[\text{arc tg}\frac{b}{c} - \text{arc tg}\frac{b}{a}\right];$$

ou, à cause de $e^{-bx\sqrt{-1}} = \cos bx - \sqrt{-1}\sin bx$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \cos bx dx - \sqrt{-1} \int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \sin bx dx$$

$$= \tfrac{1}{2} l\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\right) - \sqrt{-1}\left[\text{arc tg}\frac{b}{c} - \text{arc tg}\frac{b}{a}\right],$$

d'où :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos bx dx &= \tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\right),\\ \int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\sin bx dx &= \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c} - \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

1. *Corollaire.* Pour $b=0$, la 1^re des formules (12) reproduit (11). Si dans la formule

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cdot e^{-bx\sqrt{-1}}dx = l(a+b\sqrt{-1}) - l(c+b\sqrt{-1}),$$

on pose $e^{-x}=z$, elle se réduit à

$$\int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^{c-1}}{lz}\cdot z^{b\sqrt{-1}}\, dz = l(a+b\sqrt{-1}) - l(c+b\sqrt{-1}).$$

En fesant, dans celle-ci, $b=0$, on a :

$$\int_0^1 \frac{z^a-z^c}{zlz}dz = l\left(\frac{a}{c}\right),$$

ce qui est la formule (10). En posant dans (10) $x=e^z$, on obtient (11).

2. *Corollaire.* Si dans les formules (12), on pose $a=\infty$, $c=0$, elles deviendront :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{x} &= \infty,\\ \int_0^\infty \frac{\sin bx dx}{x} &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

## 6$^{me}$ Méthode.

*Détermination de la valeur des intégrales définies au moyen de l'intégration par parties.*

Cette méthode est résumée dans le théorème suivant :

### Théorème.

f(x) *étant une fonction continue entre les limites* x = a, x = b, *je dis que l'on aura :*

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \int_a^b x^n dx \cdot \frac{d^{n+1}f(x)}{dx^{n+1}}$$

$$= \Sigma \left\{ (-1)^p \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots p} \left[ b^p \cdot \frac{d^p f(b)}{db^p} - a^p \cdot \frac{d^p f(a)}{da^p} \right] \right\},$$

Σ *désignant la somme de tous les termes que l'on obtient en fesant dans l'expression placée à la droite de* Σ, p *successivement égal à* $0, 1, 2, 3, \ldots n$.

*Démonstration.* On a, par identité :

$$x^{n-1} dx \cdot \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

$$= x^{n-1} \frac{d^n f(x)}{dx^n} dx + \frac{1}{n} x^n \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} dx - \frac{1}{n} x^n \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} dx$$

$$= d\left[\frac{1}{n} x^n \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right] - \frac{1}{n} x^n \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} dx ;$$

donc, en intégrant :

$$\int x^{n-1} dx \cdot \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{n} x^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} - \frac{1}{n} \int x^n dx \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}}. \qquad (\alpha$$

En fesant ici successivement

$$n = 1, 2, 3, \ \ldots \ n-1, n,$$

on a :

$$\int dx \frac{df(x)}{dx} = f(x) = x \frac{df(x)}{dx} - \int x dx \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2},$$

$$\int x dx \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \tfrac{1}{2} x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \tfrac{1}{2} \int x^2 dx \frac{d^3 f(x)}{dx^3},$$

$$\int x^2 dx \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \tfrac{1}{3} x^3 \frac{d^3 f(x)}{dx^3} - \tfrac{1}{3} \int x^3 dx \frac{d^4 f(x)}{dx^4},$$

etc. = etc. etc.

$$\int x^{n-1} dx \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{n} x^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} - \frac{1}{n} \int x^n dx \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}}.$$

De là on tire, en effectuant les substitutions successives, et en résolvant l'équation résultante par rapport à son dernier terme :

$$(-1)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \int x^n dx \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} = f(x) - x \frac{d f(x)}{dx}$$

$$+ \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx} - \text{etc.}, + (-1)^n \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Si dans cette dernière on fait successivement $x=b$, $x=a$, on aura, en retranchant :

$$(-1)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \int_a^b x^n dx \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}}$$

$$= [f(b) - f(a)] + (-1)^1 \tfrac{1}{1} [b \frac{d f(b)}{db} - a \frac{d f(a)}{da}]$$

$$+ (-1)^2 \frac{1}{1 \cdot 2} [b^2 \frac{d^2 f(b)}{db^2} - a^2 \frac{d^2 f(a)}{da^2}]$$

$$+ \text{etc.}$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} [b^n \frac{d^n f(b)}{db^n} - a^n \frac{d^n f(a)}{da}].$$

Comme le terme général du 2[d] membre est

$$(-1)^p \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots p} [b^p \frac{d^p f(b)}{db^p} - a^p \frac{d^p f(a)}{da^p},$$

On peut écrire aussi :

$$(-1)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \int_a^b x^n dx \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}}$$

$$= \Sigma \left\{ (-1)^p \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots p} [b^p \frac{d^p f(b)}{db^p} - a^p \frac{d^p f(a)}{da^p}) \right\}, \qquad (14)$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots n.$$

On voit que l'intégration par partie, appliquée plusieurs fois de suite, conduit, à l'aide de substitutions consécutives, à une relation contenant deux intégrales définies, en sorte que si l'on connaît l'une d'entre elles, on obtiendra aussi l'autre.

### 1er Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales définies*

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx\,,\ \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx.$$

L'intégration par partie donne :

$$\int e^{-ax} \cos bx dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} \cos bx - \frac{b}{a} \int e^{-ax} \sin bx dx$$

$$\int e^{-ax} \sin bx dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} \sin bx + \frac{b}{a} \int e^{-ax} \cos bx dx.$$

En multipliant par $a$, et en transposant, il vient :

$$a \int e^{-ax} \cos bx dx + a \int e^{-ax} \sin bx dx = -e^{-ax} \cos bx\,,$$

$$b \int e^{-ax} \cos bx dx - a \int e^{-ax} \sin bx dx = e^{-ax} \sin bx.$$

En intégrant entre les limites 0 et $\infty$, on a :

$$a \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx + b \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = 1\,,$$

$$b \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx + a \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = 0.$$

De ces deux équations, on tire :

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx &= \frac{a}{a^2+b^2}\,, \\ \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx &= \frac{b}{a^2+\alpha^2}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

2me Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales définies*

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int_0^1 \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1° L'intégration par parties donne :

$$\int x^{2n-2}dx\sqrt{1-x^2} = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En multipliant, et en divisant le 1er membre sous le signe $\int$ par $\sqrt{1-x^2}$, il vient, en transposant :

$$\int \frac{x^{2n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{2n-1}\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

eté. etc. etc.

Intégrons entre les limites 0 et 1, il vient :

$$\int_0^1 \frac{x^{2n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n}{2n-1}\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour $n = 1, 2, 3, \ldots n$, on a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{6}{5}\int_0^1 \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

etc. = etc.

$$\int_0^1 \frac{x^{2n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n}{2n-1}\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

en multipliant ces équations entre elles, membre à membre, on trouve, en réduisant :

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{1\cdot 2 \ldots \quad 2n}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (16)$$

2° L'intégration par parties donne :

$$\int x^{2n-1}dx\sqrt{1-x^2} = \frac{x^{2n}}{2n}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n}\int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En multipliant et en divisant dans le 1er membre sous le signe $\int$ par $\sqrt{1-x^2}$, on trouve, en transposant :

$$\int\frac{x^{2n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{2n}}{2n}\sqrt{1-x^2} + \frac{2n+1}{2n}\int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

par suite :

$$\int_0^1\frac{x^{2n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n+1}{2n}\int_0^1\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Fesons $n=1, 2, 3, \ldots n$, on trouve, en opérant comme ci-dessus :

$$\int_0^1\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4 \ldots \quad 2n}{3\cdot 5 \ldots (2n+1)}. \qquad (17)$$

*Corollaire*. En fesant $z = \arcsin x$, on trouve :

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}z\,dz = \frac{1\cdot 3 \ldots 2n-1}{2\cdot 4 \ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}\\
\int_0^1\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}z\,dz = \frac{2\cdot 4 \ldots 2n}{1\cdot 3 \ldots 2n+1}.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

### 3me Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales définies*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\cos x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\sin x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n+1}\cos x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n+1}\sin x dx.$$

*Solution.* 1° L'intégration par parties donne :

$$\int x^{2n-2}\cos x dx = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\cos x + \frac{1}{2n-1}\int x^{2n-1}\sin x dx,$$

$$\int x^{2n-1}\sin x dx = \frac{x^{2n}}{2n}\sin x - \frac{1}{2n}\int x^{2n}\cos x dx;$$

d'où :

$$\int x^{2n-2}\cos x dx = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\cos x + \frac{x^{2n}}{2n-1\cdot 2n}\sin x$$
$$- \frac{1}{2n-1\cdot 2n}\int x^{2n}\cos x dx.$$

En intégrant, entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\cos x dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} - (2n-1)2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n-2}\cos x dx.$$

On trouvera de même :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\sin x dx = 2n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} - (2n-1)2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n-2}\sin x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n+1}\cos x dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} - (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\sin x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n+1}\sin x dx = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n}\cos x dx.$$

### 4$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-a^2x^2} dx.$$

*Solution.* En intégrant par parties, il vient :

$$\int x^{2n-2} e^{-a^2x^2} dx = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} e^{-a^2x^2} + \frac{2a^2}{2n-1} \int x^{2n} e^{-a^2x^2};$$

Le 1$^{er}$ terme du 2$^{d}$ membre disparaît pour $x=0$, à cause du facteur $x$, et pour $x=\infty$, à cause du facteur $e^{-a^2x^2}$; on a donc :

$$\int_0^\infty x^{2n-2} e^{-a^2x^2} dx = \frac{2a^2}{2n-1} \int_0^\infty x^{2n} e^{-a^2x^2} dx;$$

d'où : $$\int_0^\infty x^{2n} e^{-a^2x^2} dx = \frac{2n-1}{2a^2} \int_0^\infty x^{2n-2} e^{-a^2x^2} dx.$$

Comme on a : $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$, si,

dans l'équation précédente, on fait $n$ successivement égal à $1, 2, \ldots n$, et si on multiplie par ordre les $n$ équations résultantes, on trouve, en réduisant :

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-a^2x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}{2^{n+1} a^{2n+1}} \sqrt{\pi}. \qquad (19)$$

*Corollaire.* Pour $a=1$, on a :

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots 2n-1}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}. \qquad (20)$$

Pour $a = e^{la}$, il vient :

$$\int_0^\infty x^{2n} a^{-m^2x^2} dx = \int_0^\infty x^{2n} e^{-m^2 la \cdot x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^{n+1}(m\sqrt{la})^{2n+1}} \cdot \sqrt{\pi}.$$

## 5$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty x^n e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx.$$

L'intégration par parties donne :

$$\int e^{-(a+b\sqrt{-1})x}x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} e^{-(a+b\sqrt{-1})x}$$

$$+\frac{a+\sqrt{b-1}}{n}\int x^n e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx\,; \quad \text{d'où :}$$

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x}x^{n-1}dx = \frac{a+b\sqrt{-1}}{n}\int_0^\infty x^n e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx.$$

Donc, en opérant comme dans l'exemple précédent :

$$\int_0^\infty x^n e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx = \frac{1\cdot 2 \ldots n}{(ab\sqrt{-1})^n},$$

ou $$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\cdot e^{-b\sqrt{-1}}dx = \frac{1\cdot 2 \ldots n}{(a+b\sqrt{-1})^n};$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}(\cos bx - \sqrt{-1}\sin bx)\,dx = \frac{1\cdot 2 \ldots n}{(a+b\sqrt{-1})^n}.$$

Soit : $$a+b\sqrt{-1} = \varsigma(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\,;$$

d'où : $a = \varsigma\cos\varphi$, $b = \varsigma\sin\varphi$, $\varsigma = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$, $\varphi = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$;

donc l'équation précédente devient :

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos bx dx - \sqrt{-1}\int_0^\infty x^n e^{-ax}\sin bx dx$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n}{\varsigma^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + \sqrt{-1}\sin(n+1)\varphi]},$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\cdot[\cos(n+1)\varphi - \sqrt{-1}\sin(n+1)\varphi].$$

Cette égalité se partage en deux :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty x^n dx\, e^{-ax}\cos bx &= \frac{1\cdot 2 \ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\cos\left[(n+1)\operatorname{arc tg}\frac{b}{a}\right], \\ \int_0^\infty x^n dx\, e^{-ax}\sin bx &= \frac{1\cdot 2 \ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc tg}\frac{b}{a}\right].\end{aligned}\right\} (21)$$

Ces formules sont dues à Euler, nous en donnerons bientôt une autre démonstration, qui ne demande point l'emploi des imaginaires.

Pour $n=0$, les formules (21) se réduisent aux form. (15).

### 6$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales définies*

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx dx,\ \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\sin bx dx.$$

*Solution.* On a :

$$(\alpha)\quad \int_0^\infty e^{-(a^2x^2+b\sqrt{-1}\cdot x)}dx = \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cdot e^{-bx\sqrt{-1}}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx dx - \sqrt{-1}\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\sin bx dx.$$

Mais on a aussi :

$$\int_0^\infty e^{-(a^2x^2+b\sqrt{-1}\cdot x)}dx = \int_0^\infty e^{-(a^2x^2+bx\sqrt{-1}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2})}dx$$

$$= e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\int_0^\infty e^{-a^2(x+\frac{b}{2a}\sqrt{-1})^2}dx,$$

$$= e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\int_0^\infty e^{-a^2z^2}dz = e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a}. \quad (\beta$$

En égalant ($\alpha$) et ($\beta$, il vient :

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx dx - \sqrt{-1}\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\sin bx dx = e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2a};$$

d'où l'on déduit :

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx dx = e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \\ \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\sin bx dx = 0. \end{array}\right\} \quad (22)$$

*Corollaire.* En différentiant la 1<sup>re</sup> de ces équations $n$ fois de suite par rapport à $b$, on en déduit les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^\infty x^{2n}e^{-a^2x^2}\cos bx dx = (-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{d^{2n}\cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{db^{2n}}, \\ \int_0^\infty x^{2n-1}e^{-a^2x^2}\sin bx dx = (-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{d^{2n-1}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{db^{2n-1}}. \end{array}\right\} \quad (23)$$

### 7<sup>me</sup> Exemple.

*Déterminer la valeur des intégrales*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n}z dz,\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n+1}z dz.$$

*Solution.* $x = tgz$, on aura $x = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, pour $z = \begin{cases}\frac{\pi}{4}\\0\end{cases}$, d'où :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n-2k}z dz = \int_0^1 \frac{x^{2n-2k}dx}{1+x^2}, \quad (\alpha)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n-2k+1}z\,dz = \int_0^1 \frac{x^{2n-2k+1}dx}{1+x^2}. \quad (\beta$$

1° Fesons dans la formule aux différentielles binômes :

$$\int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^{m-n+1}}{b(m-np+1)(a+bx^n)^{p-1}}$$

$$-\frac{a(m-n+1)}{b(m-np+1)}\int \frac{x^{m-n}dx}{(a+bx^n)^p},$$

$m=2n-2k$, $a=1$, $b=1$, $p=1$, $n=2$, il vient :

$$\int \frac{x^{2n-2k}dx}{1+x^2} = \frac{x^{2n-2k-1}}{2n-2k-1} - \int \frac{x^{2n-2k-2}dx}{1+x^2};$$

d'où :

$$\int_0^1 \frac{x^{2n-2k}dx}{1+x^2} = \frac{1}{2n-2k-1} - \int_0^1 \frac{x^{2n-2k-2}dx}{1+x^2},$$

ou,

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} tg^{2n-2k}dz = \frac{1}{2n-2k-1} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} tg^{2n-2k-2}z\,dz.$$

Pour $k=0, 1, 2, \ldots k$, on trouve, en substituant :

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} tg^{2n}z\,dz = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \text{etc.}$$

$$\pm \frac{1}{2n-2k-1} \mp \int_0^{\frac{1}{4}\pi} tg^{2n-2k-2}z\,dz.$$

Soit $2n-2k-2=0$, il vient :

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} tg^{2n}z\,dz = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \text{etc.} \pm 1 \mp \tfrac{1}{4}\pi.$$

2° On trouve de même :

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} tg^{2n-2k+1}z\,dz = \int_0^1 \frac{x^{2n-2k+1}dx}{1+x^2} = \frac{1}{2n-2k} - \int_0^1 \frac{x^{2n-2k-1}dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2n-2k} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n-2k-1}z\,dz.$$

Pour $k = 0,1,2, \ldots k$, il vient :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} tg^{2n+1}z\,dz = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-4} - \text{etc.}$$

$$\pm \frac{1}{2n-2k} \mp \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n-2k-1}z\,dz.$$

Soit $2n-2k-1=1$,

on aura $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgz\,dz = -\tfrac{1}{2}l\left(\tfrac{1}{2}\right),$$ par suite :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n+1}z\,dz = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-4} - \text{etc.} \pm \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}l\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

### 8^me^ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale définie :*

$$P = \int_0^\infty \left[\left(\mu - \tfrac{1}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \tfrac{1}{2}\right)\left(e^{-\mu x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]\frac{dx}{x}, \quad \mu > 0.$$

*Solution.* On a, en développant :

$$P = \int_0^\infty \frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\right)e^{-x}dx}{x} + \int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x^2} + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x}$$

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}x}dx}{x^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}x}dx}{x}, = (\mu - \tfrac{1}{2})\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x^2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{x^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{x},$$

$$= (\mu - 1)\int_{da}^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} + \frac{1}{2}\int_{da}^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x} + \int_{da}^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x^2} - \frac{1}{2}\int_{da}^\infty \frac{e^{-x}dx}{x^2}.$$

En intégrant par parties, on a :

$$\int_{da}^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x^2} = \frac{e^{-\mu da}}{da} - \mu\int_{da}^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x},$$

$$\int_{da}^\infty \frac{e^{-x}dx}{x^2} = \frac{e^{-da}}{da} - \int_{da}^\infty \frac{e^{-x}dx}{x};$$

en substituant, P devient :

$$P = (\mu - 1)\int_{da}^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} + \frac{1}{2}\int_{da}^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x} + \frac{e^{-\mu da}}{da} - \mu\int_{da}^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{e^{-da}}{da} + \frac{1}{2}\int_{da}^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}.$$

En développant les termes $\frac{e^{-\mu da}}{da}$, $\frac{e^{-da}}{da}$, et en désignant par $k$ l'ensemble des termes qui ont $da$ pour facteur, on pourra écrire :

$$P = \left(\frac{1}{da} - \frac{1}{2da}\right) + \frac{1}{2} - \mu + k \cdot da + (\mu - \tfrac{1}{2})\int_{da}^\infty \frac{e^{-x} - e^{-\mu x}}{x}dx.$$

Remplaçons de nouveau $da$ par sa valeur numérique, ou zéro, on aura, à cause de la formule (11) :

$$P = \tfrac{1}{2} - \mu + (\mu - \tfrac{1}{2})\, l(\mu). \qquad (23')$$

### 9$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale définie*

$$P=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\left[\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}-\frac{e^{-2x}}{x}\right]dx.$$

*Solution.* On a :

$$P=\tfrac{1}{2}\int_{da}^\infty\frac{e^{-x}}{x}dx-\tfrac{1}{2}\int_{da}^\infty\frac{e^{-2x}}{x^2}dx-\tfrac{1}{2}\int_{da}^\infty\frac{e^{-2x}dx}{x}.$$

L'intégration par parties donne :

$$\int_{da}^\infty\frac{e^{-x}dx}{x}=\frac{e^{-da}}{da}-\int_{da}^\infty\frac{e^{-x}dx}{x},$$

$$\int_{da}^\infty\frac{e^{-2x}dx}{x^2}=\frac{e^{-2da}}{da}-2\int_{da}^\infty\frac{e^{-2x}dx}{x}.$$

Par là P devient :

$$P=\tfrac{1}{2}\,\frac{e^{-da}}{da}-\tfrac{1}{2}\frac{e^{-2da}}{da}-\tfrac{1}{2}\int_{da}^\infty\frac{e^{-x}dx}{x}+\int_{da}^\infty\frac{e^{-2x}dx}{x}-\tfrac{1}{2}\int_{da}^\infty\frac{e^{-2x}dx}{x},$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{da}-\frac{1}{da}\right\}-\tfrac{1}{2}+1+k\cdot da-\tfrac{1}{2}\int_{da}^\infty\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx.$$

En remplaçant *da* par zéro, et en ayant égard à la formule (11), il vient :

$$P=\tfrac{1}{2}[1-l(2)].\qquad(23'')$$

### 7$^{me}$ Méthode.

*Détermination de la valeur des intégrales définies par l'introduction d'un facteur convenable.*

Soit $\int_a^b P\cdot f(x)dx=A$, et admettons que pour une certaine valeur attribuée à une constante $m$ qui entre dans les

quantités P et A, P se réduise à l'unité, et A devienne B, on aura :

$$\int_a^b f(x)dx = B.$$

EXEMPLE.

*Déterminer la valeur des intégrales*

$$\int_0^\infty \cos bxdx, \quad \int_0^\infty \sin bxdx.$$

*Solution.* Ces intégrales peuvent être considérées comme équivalentes à celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \cos bxdx &= \int_0^\infty e^{-da\cdot x}\cos bxdx = \frac{da}{da^2+b^2} = 0,\\ \int_0^\infty \sin bxdx &= \int_0^\infty e^{-da\cdot x}\sin bxdx = \frac{b}{da^2+b^2} = \frac{1}{b}.\end{aligned}\right\} \quad (23')$$

8$^{me}$ MÉTHODE.

*Détermination de la valeur des intégrales définies, par l'extension des limites.*

Si la fonction sous le signe d'intégration contient un facteur infiniment petit, et que l'intégrale elle-même soit infiniment petite, on peut, en vertu des formules (32), (33), changer les limites de telle sorte que l'intégration devienne possible au moyen de procédés connus.

1$^{er}$ EXEMPLE.

*Soit* k *infiniment petit, on demande la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dk}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Solution.* Si, dans la formule des différentielles binômes

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{na(p+1)}$$

$$+\frac{m+np+n}{na(p+1)}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}dx,$$

on fait $m=1$, $n=2$, $x=k$, $p=-\frac{3}{2}$, $a=1$, $b=1$, on obtient :

$$\int (1+k^2)^{-\frac{3}{2}}dk = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} + C.$$

$k$ étant, par hypothèse, une quantité infiniment petite, et les limites devant être les valeurs finies 0 et $2\pi$, l'on voit que la valeur de l'intégrale cherchée doit être indépendante de ses limites, et que l'on peut par conséquent substituer à ces dernières

$$-\infty = -\frac{1}{k},\ +\infty = \frac{1}{k},$$

et l'on aura :

$$(23'') \quad \int_0^{2\pi} \frac{dk}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} (1+k^2)^{-\frac{3}{2}}dk$$

$$= \frac{\frac{1}{k}}{\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}} + \frac{\frac{1}{k}}{\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}} = \frac{2}{\sqrt{1+k^2}} = 2.$$

### 2^me^ Exemple.

*Soit* k *infiniment petit, on demande la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{\pi} \frac{kdh}{k^2+h^2}.$$

*Solution.* Comme $k$ est infiniment petit, l'intégrale de $\frac{kdh}{k^2+h^2}$ sera nulle pour toute valeur de $h$ qui n'est pas indéfiniment

petite. Nous pouvons donc prendre l'intégrale

$$\int \frac{kdh}{k^2+h^2} = \text{arc tg}\frac{h}{k} + \text{C}$$

entre les deux limites $+\delta$ et $-\delta$, ce qui donne :

$$(23''')\quad \int_0^\pi \frac{kdh}{k^2+h^2} = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{kdh}{k^2+h^2} = 2\,\text{arc tg}\frac{\delta}{k}$$

$$= 2\,\text{arc tg}\,\infty = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

On se sert fréquemment de la méthode par extension des limites, lorsqu'on veut déduire d'une intégrale rapportée aux limites 0 et $\infty$, la même intégrale, lorsque les limites sont $-\infty$ et $+\infty$.

### 3me Exemple.

*Des intégrales*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\quad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bxdx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{b^2},$$

*déduire les suivantes :*

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx,\quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos 2bxdx.$$

*Solution.* On a :

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx + \int_0^\infty e^{-x^2}dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos 2bxdx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\cos 2bxdx + \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bxdx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bxdx = \sqrt{\pi}\, e^{b^2}.$$

Voir la formule (36') du 1er livre.

## 9<sup>me</sup> MÉTHODE.

*Détermination de la valeur des intégrales définies par la méthode de Poisson.*

Cette méthode, que Poisson a donnée le premier dans le 16$^{me}$ cah. du *Journal de l'Ecole polytechnique*, p. 215, consiste à différentier sous le signe $\int$, par rapport à une constante, à éliminer l'intégrale, et à intégrer l'équation différentielle résultante.

### 1$^{er}$ EXEMPLE.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty \cos 2bx \cdot e^{-a^2x^2} dx.$$

*Solution.* Soit $\quad f(b) = \int_0^\infty \cos 2bx \cdot e^{-a^2x^2} dx$ ;

en différentiant par rapport à $b$, on a :

$$\frac{d f(b)}{db} = -\int_0^\infty 2x \sin 2bx\, e^{-a^2x^2} dx. \qquad (\alpha)$$

Mais l'intégration par parties donne :

$$\int 2x \sin 2bx\, e^{-a^2x^2} dx$$

$$= \sin 2bx \int 2x\, e^{-a^2x^2} dx - 2b \int \cos 2bx dx \int 2x\, e^{-a^2x^2} dx,$$

et comme on a :

$$\int 2x\, e^{-a^2x^2} dx = -\frac{e^{-a^2x^2}}{a^2},$$

il vient :

$$\int 2x \sin 2bx \cdot e^{-a^2x^2} dx = -\frac{\sin 2bx}{a^2} e^{-a^2x^2} + \frac{2b}{a^2} \int \cos 2bx \cdot e^{-a^2x^2} dx;$$

d'où :

$$\int_0^\infty 2x \sin 2bx \cdot e^{-a^2x^2} dx = \frac{2b}{a^2} \int_0^\infty \cos 2bx \cdot e^{-a^2x^2} dx = \frac{2b}{a^2} f(b).$$

Par là, l'équation $(\alpha)$ devient :

$$\frac{df(b)}{db} = -\frac{2b}{a^2} f(b),$$

ou :

$$\frac{df(b)}{f(b)} = -\frac{1}{a^2} \cdot 2b\, db.$$

En intégrant celle-ci, on a :

$$lf(b) = -\frac{b^2}{a^2} + C;$$

donc

$$f(b) = e^{-(\frac{b}{a})^2 + C} = e^c \cdot e^{-(\frac{b}{a})^2};$$

donc

$$f(b) = \int_0^\infty \cos 2bx\, e^{-a^2x^2} dx = C \cdot e^{-(\frac{b}{a})^2}.$$

Pour déterminer la constante, on doit poser $b = 0$; ce qui donne

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} = C.$$

On a donc, enfin

$$\int_0^\infty \cos 2bx \cdot e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-(\frac{b}{a})}.$$

C'est la 1[re] des formules (22) obtenue sans le secours des imaginaires.

### 2[me] Exemple.

*$\mu$, a étant des nombres positifs quelconques, chercher la valeur des intégrales :*

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \cos bx dx, \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \sin bx dx.$$

*Solut.* Fesons $u = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \cos tx dx$, $v = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \sin tx dx$,

on a : $\frac{du}{dt} \int_0^\infty x^\mu e^{-x} \sin tx dx$ , $\frac{dv}{dt} \int_0^\infty x^\mu e^{-x} \cos tx dx$. $(\alpha)$

L'intégration par parties donne :

$$\int x^\mu e^{-x} \sin tx dx = x^\mu \int e^{-x} \sin tx dx - \mu \int x^{\mu-1} dx \int e^{-x} \sin tx dx.$$

Mais on a :

$$\int e^{-x} \sin tx dx = -\frac{t \cos tx + \sin tx}{1+t^2} e^{-x^2} ;$$

par là l'égalité précédente devient, en intégrant entre 0 et $\infty$ :

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x} \sin tx dx = \frac{\mu}{1+t^2} \int_0^\infty x^{\mu-1} [ t \cos tx + \sin tx ] e^{-x} dx ,$$

$$= \frac{\mu}{1+t^2} [ tu + v ].$$

Donc la 1re des équations $(\alpha)$ devient :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{1+t^2} [ tu + v ]. \quad (\beta$$

Si on traite la 2de des équations $(\alpha)$ d'une manière tout-à-fait semblable, on est conduit à :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{1+t^2} [-u + tv]. \quad (\gamma$$

De ces deux équations on tire :

$$\frac{du}{dt} - \sqrt{-1} \frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{1+t^2} [t(u - v\sqrt{-1}) + v + u\sqrt{-1} ] ,$$

$$= -\frac{\mu}{1+t^2} [ t(u - v\sqrt{-1} ) + \sqrt{-1} (u - v\sqrt{-1}) ] ,$$

$$= -\frac{\mu}{1+t^2} [t + \sqrt{-1}] w, \text{ en posant } w = u - v\sqrt{-1} ,$$

et par conséquent $\frac{dw}{dt} = \frac{du}{dt} - \sqrt{-1} \frac{dv}{dt}$.

On a donc :

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\mu}{1+t^2} [t + \sqrt{-1}] w = -\frac{\mu}{t - \sqrt{-1}} \cdot w = -\frac{\mu \sqrt{-1}}{t\sqrt{-1} + 1} w.$$

Soit $t\sqrt{-1} = \tau$, donc $\frac{dw}{d\tau} = -\frac{\mu}{\tau+1} w$ , $\frac{dw}{w} = -\mu \frac{d\tau}{\tau+1}$ ;

donc, en intégrant :

$$lw = c - \mu l(\tau + 1), \quad \text{et} \quad w = \frac{c}{(\tau+1)^\mu} = \frac{c}{(t\sqrt{-1}+1)^\mu}.$$

Mais on a :

$$w = u - v\sqrt{-1} =$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \cos tx dx - \sqrt{-1} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \sin tx dx$$

$$= \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} e^{-tx\sqrt{-1}} = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-(1+t\sqrt{-1})x} dx.$$

On a donc :

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-(1+t\sqrt{-1})x} dx = \frac{c}{(1+t\sqrt{-1})^\mu}. \qquad (\delta$$

Pour déterminer la constante C, il faut faire $t=0$, ce qui donne :

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx = C = \Gamma(\mu); \quad \text{form. (53''), liv. I.}$$

$$\text{donc, } \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-(1+t\sqrt{-1})x} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(1+t\sqrt{-1})^\mu}.$$

Pour $t = \frac{b}{a}$, $x = ax$, on a :

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(a+b\sqrt{-1})^\mu}. \qquad (24)$$

Donc, en opérant comme pour les form. (21),

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \cos bx dx &= \frac{\Gamma(\mu)\cos\left(\mu \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}\mu}}, \\ \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} \sin bx dx &= \frac{\Gamma(\mu)\sin\left(\mu \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}\mu}}. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Ce sont les formules (21) démontrées pour un exposant $\mu$ quelconque. Quand $\mu$ est un nombre entier et positif, on a

$$\Gamma(\mu)=1\cdot2\cdot3\ \ldots\ \mu-1.$$

3$^{me}$ Exemple.

*Déterminer la valeur de l'intégrale*

$$u=\int_0^\infty\frac{\cos axdx}{1+x^2}.\qquad(\alpha$$

*Solution.* En différentiant deux fois de suite par rapport à $a$, on trouve :

$$-\frac{d^2u}{da^2}=\int_0^\infty\frac{x^2\cos axdx}{1+x^2}.\qquad(\alpha'$$

En ajoutant les équations ($\alpha$, et ($\alpha'$, il vient :

$$u-\frac{d^2u}{da^2}=\int_0^\infty\cos axdx=0.\qquad[\text{Voir }(23')]$$

L'intégrale de cette équation est

$$u=c\cdot e^{-a}.$$

Mais pour $a=0$, l'équation ($\alpha$ donne $u=\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$;

donc $c=\frac{\pi}{2}$, et par suite

$$u=\int_0^\infty\frac{\cos axdx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\cdot e^{-a}.\qquad(26)$$

Pour $x=\frac{z}{a}$, il vient :

$$\int_0^\infty\frac{a\cos zdz}{a^2+z^2}=\frac{\pi}{2}\cdot e^{-a}.\qquad(27)$$

*Corollaire.* En différentiant (26), par rapport à $a$, il vient :

$$\int_0^\infty\frac{x\sin axdx}{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\pi\cdot e^{-a},\quad\text{d'où}\quad\int_0^\infty\frac{z\sin zdz}{a^2+z^2}=\frac{\pi}{2}\cdot e^{-a}.\qquad(28)$$

Ces formules sont dûes à Laplace.

### 4^me Exemple.

*Déterminer la valeur de l'intégrale*

$$u = \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx. \quad (\alpha$$

*Solution.* En différentiant par rapport à $a$, il vient :

$$\frac{du}{da} = -2a \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2}.$$

Soit $x = \frac{a}{z}$, alors les limites $x = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$, deviennent $z = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$,

et on a : $dx = -\frac{adz}{z^2}$, $\frac{dx}{x^2} = -\frac{dz}{a}$, $x^2 + \frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2}{z^2} + z^2$ ;

donc

$$\frac{du}{da} = 2 \int_\infty^0 e^{-\left(z^2 + \frac{a^2}{z^2}\right)} dz = -2 \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{z^2}\right)} dx = -2u,$$

ou $\frac{du}{u} = -2\,da$, $u = c \cdot e^{-2a}$.

pour $a = 0$, ($\alpha$ donne $u = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

donc, enfin: $u = \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-2a}$. (29)

### 5^me Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2 + u^2} \cdot \frac{du}{u} \cdot \quad (\alpha$$

*Solution.* En différentiant deux fois par rapport à $x$, on a :

$$(\alpha' \qquad \frac{dy}{dx}=\int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2+u^2}\,du\,,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{a^2+u^2}\,du.$$

On tire de là :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=-\int_0^\infty \frac{\sin xdu}{u}=-\frac{\pi}{2}\,,$$

dont l'intégrale complète est :

$$y=\mathrm{A}e^{ax}+\mathrm{B}e^{-ax}+\frac{\pi}{2a^2}. \qquad (\beta$$

En différentiant celle-ci, deux fois, on trouve :

$$\frac{dy}{dx}=a\mathrm{A}e^{ax}-a\mathrm{B}e^{-a},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a^2\mathrm{A}e^{ax}+a^2\mathrm{B}e^{-ax}.$$

Pour $x=0$, les équations ($\alpha$, et ($\alpha'$ donnent :

$$y=0\,,\ \frac{dy}{dx}=\int_0^\infty \frac{du}{a^2+u^2}=\frac{\pi}{2a}\,.$$

On a donc, pour déterminer A et B, les équations :

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\frac{\pi}{2a^2}=0,\quad a\mathrm{A}-a\mathrm{B}=\frac{\pi}{2a};$$

d'où : $\mathrm{A}=0,\ \mathrm{B}=-\frac{\pi}{2a^2}.$

Donc, enfin : $$y=\int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2+u^2}\cdot\frac{du}{u}=\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ax}), \qquad (30)$$

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2+u^2}\,du=\frac{\pi}{2a}\cdot e^{-ax}, \qquad (31)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{a^2+u^2}\,du=\frac{\pi}{2}e^{-ax}. \qquad (32)$$

6me Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$y=\int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2-u^2}\cdot\frac{du}{u}. \quad (\alpha$$

*Solution.* En différentiant deux fois par rapport à $x$, on trouve :

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2-u^2}du, \quad (\alpha'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{a^2-u^2}du. \quad (\alpha''$$

On en tire : $$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}du=\frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale de cette équation est :

$$y=\mathrm{A}\sin ax+\mathrm{B}\cos ax+\frac{\pi}{2a^2}.$$

Donc : $$\frac{dy}{dx}=a\,\mathrm{A}\cos ax-\mathrm{B}a\sin ax,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2\mathrm{A}\sin ax-a^2\mathrm{B}\cos ax.$$

Pour $x=0$, $(\alpha$, et $(\alpha'$ donnent :

$$y=0,\quad \frac{dy}{dx}=\int_0^\infty \frac{du}{a^2-u^2}=0;$$

par là, on trouve : $\mathrm{B}+\frac{\pi}{2a^2}=0$, $a\mathrm{A}=0$, ou $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=-\frac{\pi}{2a^2}$.

Par conséquent les équations $(\alpha$, $(\alpha'$, $(\alpha''$ deviennent :

$$y=\int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2-u^2}\cdot du=\frac{\pi}{2a^2}(1-\cos ax), \quad (33)$$

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2-u^2}du=\frac{\pi}{2a}\sin ax, \quad (34)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{a^2-u^2}du=-\frac{\pi}{2}\cos ax. \quad (35)$$

## 10$^{me}$ Méthode.

*Détermination de la valeur exacte des intégrales définies par le moyen du développement en série.*

Si deux quantités A, et $\int_a^b f(x)dx$, donnent le même développement en série convergente, on en conclura :

$$\int_a^b f(x)dx = A.$$

Les exemples suivants sont propres à montrer l'usage des séries dans la théorie des intégrales définies.

### 1$^{er}$ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x^n}.$$

*Solution.* On a, par les formules de Bernoulli :

$$l\sin x = lx + l(1-\frac{x}{\pi}) + l(1+\frac{x}{\pi}) + l(1-\frac{x}{2\pi}) + l(1+\frac{x}{2\pi}) + \text{etc.},$$

$$l\cos x = l(1-\frac{2x}{\pi}) + l(1+\frac{2x}{\pi}) + l(1-\frac{2x}{3\pi}) + l(1+\frac{2x}{3\pi}) + \text{etc.}$$

En différentiant celles-ci, il vient :

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi-x} + \frac{1}{\pi+x} - \frac{1}{2\pi-x} + \frac{1}{2\pi+x} - \text{etc.},$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\pi-2x} - \frac{2}{\pi+2x} + \frac{2}{3\pi-2x} - \frac{2}{3\pi+2x} + \text{etc.}$$

En changeant dans cette dernière $x$ en $\frac{1}{2}x$, et en l'ajoutant à la 1$^{re}$, on trouve :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi-x} - \frac{1}{\pi+x} - \frac{1}{2\pi-x} + \frac{1}{2\pi+x} + \frac{1}{3\pi-x} - \frac{1}{3\pi+x} - \text{etc.}$$

Si nous remplaçons ici $x$ par $\frac{a\pi}{n}$, on a :

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{a\pi}{n}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{n-a}-\frac{1}{n+a}-\frac{1}{2n-a}+\text{etc.}\,; \qquad (\alpha)$$

on suppose $a<n$. $(\beta)$

Mais on a aussi : $\frac{1}{1+x^n}=1-x^n+x^{2n}-\text{etc.}$; donc

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}dx}{1+x^n}=\frac{1}{a}-\frac{1}{n+a}+\frac{1}{2n+a}-\text{etc.} \qquad (\gamma)$$

On a encore :

$$\frac{1}{1+x^n}=\frac{\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}+\frac{1}{x^{3n}}-\text{etc.}; \qquad \text{donc}$$

$$\int_1^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1+x^n}=\frac{1}{n-a}-\frac{1}{2n-a}+\frac{1}{3n-a}-\text{etc.} \qquad (\delta).$$

Donc, en ajoutant $(\gamma)$ et $(\delta)$ on a :

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}dx}{1+x^n}+\int_1^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1+x^n}=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1+x^n}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{n-a}-\frac{1}{n+a}-\frac{1}{2n-a}+\frac{1}{2n+a}+\frac{1}{3n-a}-\text{etc.} \qquad (\alpha')$$

Les séries $(\alpha)$ et $(\alpha')$ étant identiques, on en conclut :

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{a\pi}{n}}\,,\ a<n\,, \qquad (36).$$

*Corollaire*. Pour $n=1$, on a :

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi}\,,\ a<1. \qquad (37)$$

## 2<sup>me</sup> Exemple.

*Chercher la valeur de* $\int_0^{\pi n} \varphi \, d\varphi \, l(\sin^2\varphi)$, l *désignant des logarithmes népériens.*

*Solution.* L'intégration par parties donne :

$$\int_0^{n\pi} \varphi d\varphi \, l \sin\varphi = \varphi \int_0^{n\pi} d\varphi \, l \sin\varphi - \int_0^{n\pi} d\varphi \int d\varphi \, l \sin\varphi. \qquad (a)$$

Soit $\quad y = \cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \text{etc.}, \quad$ on a :

$$2y = (e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}) - \tfrac{1}{2}(e^{2\varphi\sqrt{-1}} + e^{-2\varphi\sqrt{-1}})$$
$$+ \tfrac{1}{3}(e^{3\varphi\sqrt{-1}} + e^{-3\varphi\sqrt{-1}}) - \text{etc.},$$
$$= (e^{\varphi\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}e^{3\varphi\sqrt{-1}} - \text{etc.})$$
$$+ (e^{-\varphi\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}e^{-2\varphi\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}e^{-3\varphi\sqrt{-1}} - \text{etc.}),$$
$$= l(1 - e^{\varphi\sqrt{-1}}) + l(1 - e^{-\varphi\sqrt{-1}}),$$
$$= l(1 - e^{\varphi\sqrt{-1}})(1 - e^{-\varphi\sqrt{-1}}),$$
$$= l2(1 - \cos\varphi),$$
$$= l2 + l(1 - \cos\varphi) = l2 + l \sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Changeons $\frac{1}{2}\varphi$ en $\varphi$, il vient :

$l \sin\varphi = - l2 + \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\cos 4\varphi + \frac{1}{3}\cos 6\varphi - \text{etc.}$, donc

$\int d\varphi \, l \sin\varphi = - \varphi l2 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi - \text{etc.} \qquad (\alpha)$

En multipliant celle-ci par $\varphi$, et en intégrant entre 0 et $n\pi$, on a :

$$\varphi \int_0^{n\pi} d\varphi \, l \sin\varphi = - n^2\pi^2 l2. \qquad (\beta$$

Multiplions $(\alpha)$ par $d\varphi$, puis intégrons, il vient :

$$\int d\varphi \int d\varphi \, l \sin\varphi = - \tfrac{1}{2}\varphi^2 l2 - \tfrac{1}{4}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{32}\cos 4\varphi - \text{etc.};$$

d'où :
$$\int_0^{n\pi} d\varphi \int d\varphi \, l \sin\varphi = -\tfrac{1}{2} n^2\pi^2 l2. \qquad (\gamma$$

En substituant ($\beta$ et ($\gamma$ dans ($a$), on trouve :

$$\int_0^{n\pi} \varphi \, d\varphi \, l \sin\varphi = -\tfrac{1}{2} n^2\pi^2 l2;$$

d'où :
$$\int_0^{n\pi} \varphi d\varphi \cdot 2l \sin\varphi = \int_0^{n\pi} \varphi d\varphi l(\sin^2\varphi) = -n^2\pi^2 l2. \qquad (38)$$

(Voyez sur cette intégrale, Clausen, *Journal de Crelle*, t. VII, p. 309).

### 3^me^ Exemple.

*Chercher la valeur des formules*

$$\int_0^\infty \frac{r \sin u}{1-2r\cos u+r^2} \cdot \frac{udu}{a^2+u^2} \int_0^\infty \frac{1-r\cos u}{1-2r\cos u+r^2} \cdot \frac{du}{a^2+u^2}.$$

*Solution.* 1° Fesons dans la formule (32), $x=1, 2, 3, \ldots$ à l'infini, et ajoutons les résultats après les avoir multiplié successivement par $r, r^2, r^3, \ldots$, on aura :

$$\int_0^\infty \frac{u}{a^2+u^2} \left\{ r\sin u + r^2 \sin 2u + r^3 \sin 3u + \ldots \right\}$$
$$= \frac{\pi}{2} \left\{ re^{-a} + r^2 e^{-2a} + r^3 e^{-3a} + \text{etc.} \right\},$$

Mais on a :

$$r\sin u + r^2 \sin 2u + \text{etc.} \ldots = \frac{r \sin u}{1-2r\cos u + r^2},$$

$$re^{-a} + r^2 e^{-2a} + \ldots = \frac{r}{e^{ar}-1},$$

donc,
$$\int_0^\infty \frac{r\sin u}{1-2r\cos u+r^2} \cdot \frac{udu}{a^2+u^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{e^{ar}-1}. \qquad (38')$$

2° Si on traite de la même manière l'équation (31), et en ayant égard aux relations

$$1+r\cos u+r^2\cos 2u+\ldots=\frac{1-r\cos u}{1-2r\cos u+r^2},$$

$$1+re^{-a}+r^2e^{-2a}+\ldots=\frac{e^a}{e^a-r},$$

on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{1-r\cos u}{1-2r\cos u+r^2}\cdot\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{e^a}{e^a-r}. \qquad (38'')$$

4$^{me}$ Exemple.

*Soit* $f(x)=\varphi(r,u)-\sqrt{-1}\,\psi(r,u), x=r(\cos u-\sqrt{-1}\sin u)$ $=re^{-u\sqrt{-1}}$, *trouver la valeur des intégrales :*

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(r,u)du}{a^2+u^2}, \quad \int_0^\infty \frac{u\psi(r,u)du}{a^2+u^2}.$$

*Solution.* On a, par le théorème de Mac-Laurin :

$$f(x)=A+Bx+Cx^2+\text{etc.};$$

donc $f(re^{-u\sqrt{-1}})=\varphi(r,u)-\sqrt{-1}\,\psi(r,u)$

$$=A+Br\cos u+\text{etc.}-\sqrt{-1}(Br\sin u+\text{etc.});$$

on en tire :

$$\varphi(r,u)=A+Br\cos u+Cr^2\cos ru+\text{etc.},$$

$$\psi(r,u)=Br\sin u+Cr^2\sin 2u+\text{etc.},$$

donc, 1°

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(r,u)du}{a^2+u^2}=A\int_0^\infty \frac{du}{a^2+u^2}+Br\int_0^\infty \frac{\cos udu}{a^2+u^2}+Cr^2\int_0^\infty \frac{\cos 2udu}{a^2+u^2}+\text{etc.}$$

$$=A\frac{\pi}{2a}+Br\cdot\frac{\pi}{2a}e^{-a}+Cr^2\cdot\frac{\pi}{2a}\cdot e^{-2a}+\text{etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2a}f(re^{-a}), \quad a>0.$$

2° $\int_0^\infty \frac{u\psi(r,u)du}{a^2+u^2} = \mathrm{B}r\int_0^\infty \frac{u\sin u du}{u^2+a^2} + \mathrm{C}r^2\int_0^\infty \frac{u\sin 2u du}{u^2+a^2} + \text{etc.}$

$$= \frac{\pi}{2}(\mathrm{B}re^{-a} + \mathrm{C}r^2e^{-2a} + \ldots)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\mathrm{f}(re^{-a}) - \mathrm{f}(0)\right\}. \quad a \geqq 0$$

*Remarque* 1. Pour $\mathrm{f}(x) = l(1+x)$, $x = r(\cos u + \sqrt{-1}\sin u)$,

$$l(1 + r\cos u + \sqrt{-1}\, r\sin u) = \tfrac{1}{2}l(1 + 2r\cos u + r^2)$$

$$+ \sqrt{-1}\,\text{arc tg}\,\frac{r\sin u}{1 + r\cos u},$$

$$\varphi(r,u) = \tfrac{1}{2}l(1 + 2r\cos u + r^2),\ \psi(r,u) = \text{arc tg}\frac{r\sin u}{1 + r\cos u},$$

on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{l(1+2r\cos u + r^2)du}{u^2+a^2} = \frac{\pi}{a}l(1 + re^{-a}),\ 1 \geqq r \geqq -1,$$

$$\int_0^\infty \frac{udu}{a^2+u^2}\,\text{arc tg}\,\frac{r\sin u}{1 + r\cos u} = \frac{\pi}{2}l(1 + re^{-a}),\ 1 \geqq r \geqq -1.$$

*Rem.* 2. Pour $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{1+x}$, $x = r(\cos u + \sqrt{-1}\sin u)$,

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1 + r\cos u}{1 + 2r\cos u + r^2} - \sqrt{-1}\frac{r\sin u}{1 + 2r\cos n + r^2},$$ on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{1 + r\cos u}{1 + 2r\cos u + r^2}\cdot\frac{du}{a^2+u^2} = \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{1 + re^{-a}},\ 1 > r > -1$$

$$\int_0^\infty \frac{r\sin u}{r + 2r\cos u + r^2}\cdot\frac{udu}{a^2+u^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{re^{-a}}{1 + re^{-a}},\ 1 > r > -1.$$

### 3^me Exemple.

*Les mêmes choses étant posées que dans l'exemple précédent, trouver la valeur des intégrales :*

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(r,u)du}{u^2-a^2},\quad \int_0^\infty \frac{u\psi(r,u)du}{u^2-a^2}.$$

*Solution.* $x = r(\cos u - \sqrt{-1}\sin u) = re^{-u\sqrt{-1}}$,

$$f(x) = f(re^{-u\sqrt{-1}})$$

$$= \varphi(r,u) - \sqrt{-1}\,\psi(r,u) = A + Br\cos u + Cr^2\cos 2u + \text{etc.},$$

$$-\sqrt{-1}\,[Br\sin u + Cr^2\sin 2u + \text{etc.}],$$

d'où : $\varphi(r,u) = A + Br\cos u + Cr^2\cos 2u + \text{etc.},$

$\psi(r,u) = Br\sin u + Cr^2\sin 2u + \text{etc.},$

on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(r,u)du}{u^2-a^2} = A\int_0^\infty \frac{du}{u^2-a^2} + Br\int_0^\infty \frac{\cos udu}{u^2-a^2} + Cr^2\int_0^\infty \frac{\cos 2udu}{u^2-a^2} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi}{2a}[A + Br\sin a + Cr^2\sin 2a + \text{etc.}]$$

$$= \frac{\pi}{2a}[f(0) + \psi(r,a))]\,; \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\psi(r,u)du}{u^2-a^2} = -\frac{\pi}{2}[Br\cos a + Cr^2\cos 2a + Dr^3\cos 3a + \text{etc.}]$$

$$= \frac{\pi}{2}[f(0) - \varphi(r,a)]\,, \quad a \geqq 0.$$

### 6me Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}\sin budu\,,\ \int_0^\infty \frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}\cos budu.$$

*Solution.* 1° On a : (Voir 3me liv., 2me sect. appl.)

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{u} - \cos\omega\cdot\frac{u}{1+u^2} + \cos 2\omega\cdot\frac{u}{2^2+u^2} + \text{etc.},$$

$$\pi \geqq \omega \geqq -\pi.$$

En multipliant cette égalité par sin *budu*, on trouve, en intégrant :

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\omega u}+e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\sin bu du$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u\sin bu du}{0^2+u^2}-\cos\omega\int_0^\infty \frac{u\sin bu du}{1^2+u^2}+\cos 2\omega\int_0^\infty\frac{u\sin bu du}{2^2+u^2}$$
$$-\text{ etc.},$$

$$=\frac{\pi}{2}[\tfrac{1}{2}-\cos\omega\cdot e^{-b}+\cos 2\omega\cdot e^{-2b}-\text{ etc. }].$$

Mais on a, en général :

$$\tfrac{1}{2}-r\cos\omega+r^2\cos 2\omega-r^3\cos 3\omega+\text{ etc.}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1+2r\cos\omega+r^2},$$

donc, en fesant $r=e^{-b}$, on trouve :

$$(\alpha)\quad \int_0^\infty \frac{e^{\omega u}+e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\sin bu du=\tfrac{1}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{e^b+2\cos\omega+e^{-b}},\quad b>0,$$

$$\pi \geqq \omega \geqq -\pi.$$

2° On a aussi :

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\omega u}-e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}=\sin\omega\cdot\frac{1}{1+u^2}-2\sin 2\omega\cdot\frac{1}{2^2+u^2}+\text{ etc.}$$

Multiplions par $\cos bu du$, et intégrons, il vient :

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\omega u}-e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\cos bu du$$

$$=\sin\omega\int_0^\infty\frac{\cos bu du}{1+u^2}-2\sin 2\omega\int_0^\infty\frac{\cos bu du}{2^2+u^2}+\text{ etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2}[\sin\omega\cdot e^{-b}-\sin 2\omega e^{-2b}+\text{ etc. }].$$

Mais on a, en général :

$$r\sin\omega-r^2\sin 2\omega+\text{ etc.}=\frac{r\sin\omega}{1+2r\cos\omega+r^2},\quad r<1.$$

Donc, pour $r=e^{-b}$, on trouve :

$$(\beta)\quad\int_0^\infty\frac{e^{\omega u}-e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\cos bu du=\frac{\sin\omega}{e^b+2\cos\omega+e^{-b}},\quad b>0,\ \pi>\omega>-\pi.$$

*Corollaire* 1. Pour $\omega = 0$, on tire de ($\alpha$) :

$$\int_0^\infty \frac{\sin bu du}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}}{e^{\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b}}, \; b > 0 ;$$

pour $\omega = \pi$, on tire encore de ($\alpha$) :

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi u} + e^{-\pi u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \sin bu du = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b}}{e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}}, \; b > 0.$$

En retranchant ces dernières, on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}\pi u} - e^{-\frac{1}{2}\pi u}}{e^{\frac{1}{2}\pi u} + e^{-\frac{1}{2}\pi u}} \sin bu du = \frac{2}{e^b - e^{-b}}, \; b > 0.$$

*Corollaire* 2. Si dans la formule ($\beta$) on fait $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_0^\infty \frac{\cos bu du}{e^{\frac{1}{2}\pi u} + e^{-\frac{1}{2}\pi u}} = \frac{1}{e^b + e^{-b}}, \; b > 0.$$

(Voyez, sur ces formules, et d'autres du même genre, un Mémoire de Poisson. *Journal polytechnique*, 18ᵉ cah., p. 295).

### 7$^{me}$ Exemple.

*Trouver la valeur de chacune des intégrales :*

1) $$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1} \cdot \frac{f(a + z\sqrt{-1}) - f(a - z)\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

2) $$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} \cdot \frac{f(a + z\sqrt{-1}) - f(a - z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

3) $$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi z} + 1} \cdot \frac{f(a + z\sqrt{-1}) - f(a - z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

4) $$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z} + e^{-\frac{1}{2}\pi z}} \cdot \frac{f(a + z\sqrt{-1}) + f(a - z\sqrt{-1})}{2}.$$

*1° Détermination de l'intégrale (1.*

*Solution.* Si dans la formule de Mac-Laurin

$$F(z)=F(0)+zF'(0)+\frac{z^2}{1\cdot 2}F''(0)+\ldots+\frac{z^{m-1}}{1\cdot 2\ldots m-1}F^{(m-1)}(0)$$

$$+\frac{z^m}{1\cdot 2\ldots m}F^{(m)}(\theta z),\ 0<\theta<1,$$

on pose :

$$m=2n+1,\ F(z)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{f(a+z\sqrt{-1})-f(a-z\sqrt{-1})\right\},$$

on trouve :

$$\frac{f(a+z\sqrt{-1})-f(a-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=zf'(a)-\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a)$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{1\cdot 2\ldots 2n-1}f^{(2n-1)}(a)$$

$$+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{1\cdot 2\ldots 2n+1}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(a+\theta z\sqrt{-1})+f^{(2n+1)}(a-\theta z\sqrt{-1})}{2};$$

d'où l'on tire :

$$2\int_0^\infty\frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f(a+z\sqrt{-1})-f(a-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$=f'(a)\cdot 2\int_0^\infty\frac{zdz}{e^{2\pi z}-1}-\frac{f'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3}2\int_0^\infty\frac{z^3dz}{e^{2\pi z}-1}$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{f^{(2n-1)}(a)}{1\cdot 2\ldots 2n-1}2\int_0^\infty\frac{z^{2n-1}dz}{e^{2\pi z}-1}+$$

$$\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\ldots(2n+1)}\cdot 2\int_0^\infty\frac{z^{2n+1}dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(a+z\sqrt{-1})+f^{(2n+1)}(a-z\sqrt{-1})}{2}.\qquad(\alpha)$$

Mais en désignant par $B_{2m-1}$, le $m^e$ nombre Bernoullien, on a :

$$2\int_0^\infty \frac{z^{2m-1}dz}{e^{2\pi z}-1} = 2\int_0^\infty z^{2m-1}\left\{e^{-2\pi z}+e^{-4\pi z}+\text{etc.}\right\}dz\,,$$

$$= 2\cdot\frac{1\cdot 2\ldots(2m-1)}{(2\pi)^{2m}}\left\{\frac{1}{1^{2m}}+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\text{etc.}\right\},$$

$$= \frac{1}{2m}B_{2m-1}. \quad \text{(V. Cauchy, } \textit{Analy. algéb.} \text{ p. 571).}$$

Cela posé, pour $m=1,2,3,\ldots n$, et en désignant par R la dernière intégrale à droite, l'équation ($\alpha$) devient :

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f(a+z\sqrt{-1})-f(a\quad z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{B_1}{1\cdot 2}f'(a)$$

$$-\frac{B_3}{1\ldots 4}f'''(a)+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n-1}}{1\ldots 2n}f^{(2n-1)}(a)+\frac{(-1)^n}{1\ldots(n+1)}\cdot 2R. \quad (\beta)$$

Soient $L_{2n+1}$ le minimum, $M_{2n+1}$ le maximum de l'expression

$$\frac{f^{(2n+1)}(a+z\sqrt{-1})+f^{(2n+1)}(a-z\sqrt{-1})}{2}$$

correspondante aux diverses valeurs de $z$ depuis $z=0$, jusqu'à $z=\infty$, il est clair qu'on aura :

$$2R>2\int_0^\infty \frac{z^{2n+1}dz}{e^{2\pi z}-1}L_{2n-1} = L_{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+2}B_{2n+1}\,,$$

$$2R<2\int_0^\infty \frac{z^{2n+1}dz}{e^{2\pi z}-1}M_{2n+1} = M_{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+2}B_{2n+1}\,;$$

donc, en désignant par $\varepsilon$, une fraction proprement dite, c'est-à-dire en posant $0<\varepsilon<1$, on pourra écrire :

$$2R=\varepsilon\cdot M_{2n+1}\frac{1}{2n+2}B_{2n+1}\,;$$

Par là, la formule ($\beta$) devient :

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f(a+z\sqrt{-1})-f(a-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{B_1}{1\cdot 2}f'(a)-\frac{B_3}{1\ldots 4}f'''(a)+\text{etc.}+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n-1}}{1\ldots(2n)}f^{(2n-1)}(a)+$$

$$\frac{(-1)^n B_{2n+1}}{1\ldots(2n+2)}\cdot\varepsilon M_{2n+1}\,. \qquad (38''')$$

*2° Détermination de l'intégrale* (2.

A l'aide de la formule de Mac-Laurin, on trouve, comme dans le développement précédent :

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{f(a+z\sqrt{-1})-f(a-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=$$

$$f'(a)\,2\int_0^\infty\frac{zdz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}-\frac{f'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3}\,2\int_0^\infty\frac{z^3dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}+\text{etc.},$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}f^{(2n-1)}(a)}{1\ldots(2n-1)}2\int_0^\infty\frac{z^{2n-1}dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}+$$

$$\frac{(-1)^n}{1\ldots(2n+1)}2\int_0^\infty\frac{z^{2n+1}dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(a+\theta z\sqrt{-1})+f^{(2n+1)}(a-\theta z\sqrt{-1})}{2}\,. \quad (\alpha)$$

Mais on a, en général :

$$\int_0^\infty\frac{z^{2m-1}dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}=2\int_0^\infty z^{2m-1}dz\left\{e^{-\pi z}+e^{-3\pi z}+\text{etc.}\right\},$$

$$=2\cdot\frac{1\cdot 2\ldots 2m-1}{\pi^{2m}}\left\{\frac{1}{1^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{5^{2m}}+\text{etc.}\right\},$$

$$=\frac{2^{2m}-1}{2m}B_{2m-1}\,.$$ (Cauchy, *Anal. alg.*, p. 572).

Si l'on fait $m=1,2,3,\ldots n$, et qu'on désigne par R la dernière intégrale à droite, l'équation ($\alpha$) devient :

$$2\int_0^\infty\frac{dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{f(a+z\sqrt{-1})-f(a-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=$$

$$\frac{(2^2-1)B_1}{1\cdot 2}f'(a)-\frac{(2^4-1)B_3}{1\ldots 4}f'''(a)+\text{etc.}+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(2^{2n}-1)B_{2n-1}}{1\ldots 2n}f^{(2n-1)}(a)+\frac{(-1)^n}{1\ldots(2n+1}\times 2R. \qquad (\beta)$$

Mais on a ici, comme dans le développement précédent :

$$2R>2\int_0^\infty \frac{z^{2n+1}dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}L_{2n+1}=\frac{2^{2n+2}-1}{2n+2}B_{2n+1}\cdot L_{2n+1},$$

$$2R<2\int_0^\infty \frac{z^{2n+1}dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}M_{2n+1}=\frac{2^{2n+2}-1}{2n+2}B_{2n+1}M_{2n+1};$$

donc, pour $0<\varepsilon<1$, on pourra écrire

$$2R=\frac{2^{2n+2}-1}{2n+2}B_{2n+1}\cdot\varepsilon M_{2n+1},$$

par conséquent $(\beta)$ devient :

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{f(a+z\sqrt{-1})-f(a-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{(2^2-1)B_1}{1\cdot 2}f'(a)$$

$$-\frac{(2^4-1)B_3}{1\ldots 4}f'''(a)+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)B_{2n-1}}{1\ldots(2n)}f^{(2n-1)}(a)+$$

$$\frac{(-1)^n(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1\ldots(2n+2)}\cdot\varepsilon M_{2n+1}. \qquad (38^{\text{IV}})$$

3° *Détermination de l'intégrale* (3.

En retranchant $(38^{\text{III}})$ de $(38^{\text{IV}})$ on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi z}+1}\cdot\frac{f(a+z)\sqrt{-1})-f(a-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{(2^1-1)B_1}{1\cdot 2}f'(a)$$

$$-\frac{(2^3-1)B_3}{1\ldots 4}f'''(a)+\text{etc.}+\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}}{1\ldots 2n}f^{(2n-1)}(a)+$$

$$\frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)B'_{2n+1}}{1\ldots(2n+2)}\cdot\varepsilon M_{2n+1}. \qquad (38^{\text{V}})$$

*4° Détermination de l'intégrale* (4.

Si l'on fait dans la formule de Mac-Laurin, $m=2n+2$,

$$F(z)=\tfrac{1}{2}\left\{f(a+z\sqrt{-1})+f(a-z\sqrt{-1})\right\},$$

on trouve :

$$\frac{f(a+z)\sqrt{-1})+f(a-z\sqrt{-1})}{2}=f(a)-\frac{z^2}{1\cdot 2}f''(a)+$$

$$\frac{z^4}{1\ldots 4}f^{IV}(a)-\text{etc.}+\frac{(-1)^n z^{2n}}{1\ldots 2n}f^{(2n)}(a)+$$

$$\frac{(-1)^{n+1}z^{2n+2}}{1\ldots(2n+2)}\cdot\frac{f^{(2n+2)}(a+\theta z\sqrt{-1})+f^{(2n+2)}(a-\theta z\sqrt{-1})}{2};$$

de là, on tire :

$$\int_0^\infty\frac{dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}\cdot\frac{f(a+z\sqrt{-1})+f(a-z\sqrt{-1})}{2}=$$

$$f(a)\int_0^\infty\frac{dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}-\frac{f''(a)}{1\cdot 2}\int_0^\infty\frac{z^2dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}+\ldots+$$

$$\frac{(-1)^n f^{(2n)}(a)}{1\ldots 2n}\int_0^\infty\frac{z^{2n}dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}+$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{1\ldots 2n+2}\int_0^\infty\frac{z^{(2n+2)}dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}\cdot\frac{f^{(2n+2)}(a+\theta z\sqrt{-1})+f^{(2n+2)}(a-\theta z\sqrt{-1})}{2}.\ (\alpha)$$

Mais si $B_{2m}$ désigne le $m^e$ coefficient de la série des sécantes

$$\text{séc}\,x=1+\frac{B_2}{1\cdot 2}x^2+\frac{B_4}{1\ldots 4}x^4+\frac{B_6}{1\ldots 6}x^6+\text{etc.},$$

on aura, en général :

$$\int_0^\infty\frac{z^{2m}dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}=\int_0^\infty z^{2m}dz\left\{e^{-\frac{1}{2}\pi z}-e^{-\frac{3}{2}\pi z}+e^{-\frac{5}{2}\pi z}-\text{etc.}\right\},$$

$$=\frac{1\cdot 2\ldots(2m)2^{2m+1}}{\pi^{2m+1}}\left\{\frac{1}{1^{2m+1}}-\frac{1}{3^{2m+1}}+\frac{1}{5^{2m+1}}-\text{etc.}\right\},$$

$$=\tfrac{1}{2}B_{2m}.$$

De plus, soient $L_{2n+2}$ le minimum, $M_{2n+2}$ le maximum des valeurs de la fonction $\frac{1}{2}\left\{f^{(2n+2)}(a+z\sqrt{-1})+f^{(2n+2)}(a-z\sqrt{-1})\right\}$, correspondantes aux valeurs de $z$ comprises entre 0 et $\infty$, et désignons toujours par R la dernière intégrale de ($\alpha$), on aura :

$$R > \int_0^\infty \frac{z^{2n+2}dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}} L_{2n+2} = \tfrac{1}{2} B_{2n+2}\cdot H_{2n+2},$$

$$R < \int_0^\infty \frac{z^{2n+2}dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}} M_{2n+2} = \tfrac{1}{2} B_{2n+2}\cdot M_{2n+2},$$

et par suite, on pourra écrire :

$$R = \tfrac{1}{2} B_{2n+2}\cdot \varepsilon M_{2n+2}, \quad 0<\varepsilon<1;$$

par conséquent, la formule ($\alpha$) devient :

$$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}\cdot\frac{f(a+z\sqrt{-1})+f(a-z\sqrt{-1})}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{B_0 f(a) - \frac{B_2}{1\cdot 2}f''(a) + \frac{B_4}{1\ldots 4}f^{IV}(a) - \text{etc.} + \frac{(-1)^n B_{2n}}{1\ldots 2n}f^{(2n)}(a) + \frac{(-1)^{n+1}B_{2n+2}}{1\ldots(2n+2)}\cdot\varepsilon M_{2n+2}.\right\} \quad (38^{VI})$$

## 11$^{me}$ Méthode.

*Détermination de la valeur des intégrales définies par le moyen de transcendantes.*

Lorsque les valeurs des intégrales définies ne peuvent s'obtenir sous forme finie par aucun procédé connu, alors, réduites à leurs expressions les plus simples, elles constituent des transcendantes d'une nouvelle espèce qui pourront servir à la détermination des valeurs d'une infinité d'autres intégrales définies. Pour donner un exemple de cette méthode, déterminons, à l'aide de la transcendante

$$li(x) = \int_0^x \frac{dx}{lx},$$

les intégrales définies $\int_0^\infty \frac{dt}{b-t} e^{-at}$, $\int_0^\infty \frac{dt}{b+t} \cdot e^{-at}$.

On a : $$\int_0^p \frac{dz}{lz} = li(p).$$

1° Pour $p = e^{ab}$, $z = e^{a(b-t)}$, $dz = -e^{a(b-t)} adt$, $lz = a(b-t)$,

on a : $t = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix} \right.$, à la place des limites $z = \left\{ \begin{matrix} p \\ 0 \end{matrix} \right.$;

donc : $$\int_0^p \frac{dz}{lz} = \int_\infty^0 \frac{-e^{a(b-t)} adt}{a(b-t)} = e^{ab} \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{b-t} dt = li(e^{ab});$$

d'où l'on tire : $$\int_0^\infty \frac{e^{-at}}{b-t} dt = e^{-ab} li(e^{ab}). \quad (39)$$

2° Pour $p = e^{-ab}$, $z = e^{-a(b+t)}$, on trouve, en opérant comme ci-dessus : $$\int_0^\infty \frac{e^{-at}}{b+t} dt = -e^{ab} li(e^{-ab}). \quad (40)$$

*Corollaire.* Soit, pour abréger le 2d membre de l'équation (40) $= \varphi$, en la différentiant $r$ fois par rapport à $a$, puis $s$ fois par rapport à $b$, on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{t^r dt}{(b+t)^{s+1}} \cdot e^{-at} = \frac{(-1)^r}{1 \cdot 2 \,..\, s} \frac{d^{r+s}\varphi}{da^r \cdot db^s}. \quad (41)$$

## 12me Méthode.

*Détermination de la valeur des intégrales définies, par d'autres intégrales définies plus générales, ou par la combinaison d'intégrales définies données.*

Il y a des formules aux intégrales définies très-générales, renfermant une multitude d'intégrales définies particulières ; on peut donc obtenir celles-ci, en spécialisant convenablement les premières.

1er Exemple.

Soit $f(x^2)=e^{-x^2}$, d'où $\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2)dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ ;

les formules (48), (49), (50) (51), (52), (53), du 1er livre, donneront respectivement :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx)}dx \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\pi},$$

d'où : $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\cdot e^{\frac{b^2}{4a}} ; \qquad (42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+\frac{b}{x^2})}dx\cdot e^{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\pi} ;$$

d'où : $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+\frac{b}{x^2})}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}} ; \qquad (43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+\frac{b}{x^2})}\frac{dx}{x^2}\cdot e^{2\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{\pi}{b}},$$

d'où : $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+\frac{b}{x^2})}\frac{dx}{x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-2\sqrt{ab}} ; \qquad (44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2mx}dx\cdot e^{-m^2}=\sqrt{\pi}, \text{ d'où : } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2mx}dx=\sqrt{\pi}\cdot e^{m^2}; \qquad (45)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+\frac{m^2}{4x^2})}dx\cdot e^{m}=\sqrt{\pi},$$

d'où : $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+\frac{m^2}{4x^2})}dx=\sqrt{\pi}\cdot e^{-m} ; \qquad (46)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{m^2}{4x^2}\right)} \frac{dx}{x^2} \cdot e^{m} = \frac{2}{m}\sqrt{\pi} \;;$$

d'où : $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{m^2}{4x^2}\right)} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{m}\sqrt{\pi} \cdot e^{-m} . \qquad (47)$$

### 2me Exemple.

Soit $f(x^2) = \cos(x^2)$, $f(x^2) = \sin(x^2)$, alors, (V. liv. IV, form. (80),

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \;;$$

par suite la form. (53′) du 1er livre donnera :

$$\int_0^{\infty} \tfrac{1}{2}[\cos(x^2-2mx+m^2)+\cos(x^2+2mx+m^2)]dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \;;$$

$$\int_0^{\infty} \tfrac{1}{2}[\sin(x^2-2mx+m^2)+\sin(x^2+2mx+m^2)]\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Si nous développons les sinus et les cosinus, nous trouvons, en réduisant :

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2+m^2)\cos 2mx dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad (48)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(m^2+x^2)\cos 2mx dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (49)$$

La form. (52), en la réduisant aux limites 0 et $\infty$, donne :

$$\int_0^{\infty} \cos\left(x^2-m+\frac{m^2}{4x^2}\right)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad (50)$$

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x^2-m+\frac{m^2}{4x^2}\right)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (51)$$

### 3me Exemple.

Soit $f(x^2) = e^{\pm x^2\sqrt{-1}}$; comme on a $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$ [IVe liv., form. (84)], on en tire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm x^2\sqrt{-1}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 \pm \sqrt{-1})\,;$$

on a donc par les form. (48) et (49) du 1er liv. :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(ax^2+\mathrm{b}x)\sqrt{-1}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}(1+\sqrt{-1})\,e^{-\frac{\mathrm{b}^2}{4a}\sqrt{-1}}\,; \qquad (52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+\mathrm{b}x)\sqrt{-1}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cdot(1-\sqrt{-1})\,e^{\frac{\mathrm{b}^2\sqrt{-1}}{4a}}\,; \qquad (53)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(ax^2+\frac{\mathrm{b}}{x^2})\sqrt{-1}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}(1+\sqrt{-1})\,e^{2\sqrt{a\mathrm{b}}\sqrt{-1}}\,; \qquad (54)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+\frac{\mathrm{b}}{x^2})\sqrt{-1}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}(1-\sqrt{-1})\,e^{-2\sqrt{a\mathrm{b}}\sqrt{-1}}. \qquad (55)$$

### 4me Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2}dx\,, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2}\,, \quad 0<\mu<2.$$

On a, par la form. (88) du 1er livre, en général :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\mathrm{f}(x)}{1+x^2} = \pi\,\mathrm{f}(\sqrt{-1}\,).$$

Donc, en fesant $\mathrm{f}(x) = (-x\sqrt{-1}\,)^{\mu-1}$, on a $\mathrm{f}(\sqrt{-1}) =$

$$(-\sqrt{-1}\sqrt{-1}\,)^{\mu-1} = 1\,;$$

par suite : $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2}\,dx=\pi. \qquad (\alpha)$$

Mais on a, d'un autre côté :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^4}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2}dx=[(\sqrt{-1})^{\mu-1}+(-\sqrt{-1})^{\mu-1}]\int_{0}^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2}=\pi.$$

Donc : $$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{(\sqrt{-1})^{\mu-1}+(-\sqrt{-1})^{\mu-1}}.$$

Mais on a : $$e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}=\cos\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{-1},$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}=\cos\frac{\pi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}=-\sqrt{-1};$$

donc :

$$e^{\frac{\pi}{2}(\mu-1)\sqrt{-1}}=\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin(\mu-1)\frac{\pi}{2}=(\sqrt{-1})^{\mu-1},$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}(\mu-1)\sqrt{-1}}=\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}-\sqrt{-1}\sin(\mu-1)\frac{\pi}{2}=(-\sqrt{-1})^{\mu-1};$$

on en tire, en ajoutant :

$$(\sqrt{-1})^{\mu-1}+(-\sqrt{-1})^{\mu-1}=2\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}=2\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi.$$

Donc : $$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2\sin(\frac{1}{2}\mu\pi}, \quad 0<\mu<2. \qquad (55')$$

*Corollaire.* Soit $x^2=z$, $\mu=2a$, $x=z^{\frac{1}{2}}$, $x^{\mu-1}=z^{\frac{1}{2}(\mu-1)}=$

$z^{\frac{1}{2}(2a-1)} = z^{a-\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{z^a \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz}{1+z} = \frac{\pi}{2 \sin a\pi};$$

où :

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1. \qquad (56)$$

5^me^ Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1-x^2} dx, \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{1-x^2}, \quad 0 < \mu < 2.$$

*Solution.* On a, par la form. (89) du 1^er^ liv., en général :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{f(x)}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} [f(-1) - f(+1)] \sqrt{-1}.$$

Donc, en fesant $f(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1}$, il vient :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} [(\sqrt{-1})^{\mu-1} - (-\sqrt{-1})^{\mu-1}] \sqrt{-1}$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\mu\pi}{2}.$$

ou, $$[(\sqrt{-1})^{\mu-1} + (-\sqrt{-1})^{\mu-1}] \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{1-x^2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\mu\pi}{2},$$

ou, $$2 \sin \frac{\mu\pi}{2} \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{1-x^2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\mu\pi}{2};$$

d'où l'on tire enfin :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{1-x^2} = \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\mu\pi}{2}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} = \frac{\pi}{2 \operatorname{tg} \frac{\mu\pi}{2}}. \qquad (57)$$

*Corollaire.* Pour $x^2 = z$, $\mu = 2a$, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{1-x^2} = \int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1-z} = \frac{\pi}{2 \operatorname{tg} a\pi}, \quad 0 < a < 1. \qquad (58)$$

### 6^me Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}}{1+x^2}dx,\quad \int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x^2}\cos bx dx. \quad 0<a<1.$$

*Solution.* Si dans la formule $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{1+x^2}=\pi f(\sqrt{-1})$, on pose :

$f(x)=(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}$, on a $f(\sqrt{-1})=(-1)^{a-1}e^{b}$,

donc : $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}}{1+x^2}dx=(-1)^{a-1}\pi e^{b}. \qquad (\alpha)$$

Mais on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}}{1+x^2}dx+\int_0^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}}{1+x^2},$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{(-x\sqrt{-1})^{a-1}e^{bx\sqrt{-1}}}{1+x^2}dx+\int_0^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}}{1+x^2}dx,$$

$$=[(-\sqrt{-1})^{a-1}+(\sqrt{-1})^{a-1}]\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x^2}2\cos bx dx,$$

$$=4\sin\frac{a\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x^2}\cos bx dx;$$

donc, à cause de l'équation $(\alpha)$,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x^2}\cos bx dx=\frac{(-1)^{a-1}\pi e^{b}}{4\sin\frac{a\pi}{2}}.$$

### 7$^{me}$ Exemple.

*Déterminer la valeur des intégrales*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}}{1-x^2}dx,\quad \int_{0}^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}}{1-x^2}dx.$$

*Solut.* Fesons dans la form. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}[f(-1)-f(+1)]\sqrt{-1}$,

$$f(x)=(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}},\ \text{on trouve :}$$

$$f(-1)=(-\sqrt{-1})^{a-1}e^{b\sqrt{-1}}=e^{[b-(a-1)\frac{\pi}{2}]\sqrt{-1}}$$

$$=\cos[b-(a-1)\frac{\pi}{2}]+\sqrt{-1}\sin[b-(a-1)\frac{\pi}{2}],$$

$$f(+1)=(+\sqrt{-1})^{a-1}e^{-b\sqrt{-1}}=e^{-[b-(a-1)\frac{\pi}{2}]\sqrt{-1}}$$

$$=\cos[b-(a-1)\frac{\pi}{2}]-\sqrt{-1}\sin[b-(a-1)\frac{\pi}{2}].$$

donc :

$$[f(-1)-f(1)]\sqrt{-1}=+2\sin[(a-1)\frac{\pi}{2}-b]=-\cos[\frac{a\pi}{2}-b],$$

donc $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-bx\sqrt{-1}}}{1-x^2}dx=-\frac{\pi}{2}\cos[\frac{a\pi}{2}-b].\qquad(\alpha)$$

On a donc aussi :

$$4\sin\frac{a\pi}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1-x^2}\cos bx dx=-\frac{\pi}{2}\cos[\frac{a\pi}{2}-b];$$

d'où l'on tire l'intégrale cherchée.

*Remarque.* Non-seulement on forme des intégrales définies particulières, par l'emploi de formules définies générales ; mais on obtient aussi de nouvelles intégrales définies, en combinant convenablement d'autres intégrales définies données ; reprenons par exemple les formules (48), (49), (50) et (51) du 2$^{d}$ exemple.

1° En multipliant (48) par $\cos m^2$, (49) par $\sin m^2$, on trouve en ajoutant :

$$\int_0^\infty \cos x^2 \cos 2mx dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos m^2 + \sin m^2)\ ; \tag{58}$$

En multipliant (48) par $\sin m^2$, (49) par $\cos m^2$, on a, en retranchant :

$$\int_0^\infty \sin x^2 \cos 2mx dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos m^2 - \sin m^2). \tag{59}$$

2° En multipliant (50) par $\cos m$, (51) par $\sin m$, on trouve en retranchant :

$$\int_0^\infty \cos\left(x^2 + \frac{m^2}{4x^2}\right)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos m - \sin m). \tag{60}$$

En multipliant (50) par $\sin m$, et (51) par $\cos m$, on trouve en ajoutant :

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2 + \frac{m^2}{4x^2}\right)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos m + \sin m). \tag{61}$$

On pourrait déduire de ces dernières, en ajoutant et en retranchant, des valeurs pour $\sin m$ et $\cos m$.

### 8me Exemple.

Les formules (15), combinées avec la 5me Méthode sont fréquemment employées pour la détermination, ou la transformation d'intégrales définies. En voici deux applications.

On a par les form. (15) :

1° $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos yx dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}.$$ $\mu$ étant entier et positif,

on trouve, en multipliant par $\cos \mu y dy$, et en intégrant entre les limites 0 et $\pi$ :

$$\int_0^\pi \cos \mu y dy \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos yx dx = \alpha\int_0^\pi \frac{\cos \mu y dy}{\alpha^2 + y^2}. \tag{$\alpha$}$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$\alpha\int_0^\pi \frac{\cos \mu y dy}{\alpha^2 + y^2} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}dx \int_0^\pi \cos \mu y \cos xy dy,$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\int_0^\pi \left\{\cos(\mu+x)y + \cos(\mu-x)y\right\}dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\left\{\frac{\sin(\mu+x)\pi}{\mu+x} + \frac{\sin(\mu-x)\pi}{\mu-x}\right\}$$

$$= \cos\mu\pi\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\,\frac{x\sin\pi x}{x^2-\mu^2}$$

$$=(-1)^\mu\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\frac{x\sin\pi x}{x^2-\mu^2}.$$

2° $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin yx dx = \frac{y}{\alpha^2+y^2}$; $\mu$ étant entier et positif, on trouve, en multipliant par $\sin\mu y dy$, puis en intégrant entre 0 et $\pi$ :

$$\int_0^\pi \sin\mu y dy\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin yx dx = \int_0^\pi \sin\mu y dy\frac{y}{\alpha^2+y^2}.$$

En intervertissant l'ordre dans les intégrations du 1[er] membre il vient :

$$\int_0^\pi \frac{y\sin\mu y}{\alpha^2+y^2}dy=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\int_0^\pi \sin\mu y\sin xy dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\int_0^\pi\left\{\frac{\cos(x-\mu)y}{x-\mu}-\frac{\cos(x+\mu)}{x+\mu}\right\}dy,$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\left\{\frac{\sin(x-\mu)\pi}{x-\mu}-\frac{\sin(x+\mu)\pi}{x+\mu}\right\},$$

$$=(-1)^\mu\mu\int_0^\infty\frac{\sin\pi x}{x^2-\mu^2}\,e^{-\alpha x}dx.$$

Nous ajouterons encore comme dernier exemple deux théorèmes généraux, qui conduisent à la valeur de beaucoup d'intégrales particulières d'une grande importance.

1$^{er}$ Théorème.

n *étant un nombre entier, soit* $A_{2n}$ *la valeur connue de l'intégrale*

$$\int_0^\infty x^{2n} f(x^2)dx = A_{2n}, \qquad (\alpha)$$

*en désignant par* $B_{2n}$ *la valeur inconnue de l'intégrale*

$$\int_0^\infty x^{2n} f[(x-\frac{1}{x})^2]dx = B_{2n}, \qquad (\beta)$$

*je dis que l'on aura :*

$$B_{2n} = A_0 + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} A_2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} A_4 + \text{etc.} \qquad (a)$$

*Démonstration.* On a, par ($\alpha$)

$$A_{2n} = \int_0^\infty y^{2n} f(y^2)dy,$$

$$= \int_{-\infty}^0 y^{2n} f(y^2)dy;$$

donc : $$\int_{-\infty}^\infty y^{2n} f(y^2)dy = \int_0^\infty y^{2n} f(y^2)dy + \int_{-\infty}^0 y^{2n} f(y^2)dy,$$

$$= 2\int_0^\infty y^{2n} f(y^2)dy,$$

$$= 2A_{2n}. \qquad (\gamma)$$

Fesons $y = x - \frac{1}{x}$; on aura pour $y = \left\{\begin{matrix}\infty \\ -\infty\end{matrix}\right.$, $x = \left\{\begin{matrix}\infty \\ 0\end{matrix}\right.$, donc le 1$^{er}$ membre de ($\gamma$) devient :

$$\int_{-\infty}^\infty y^{2n} f(y^2)dy = \int_0^\infty (x-\frac{1}{x})^{2n}(1+\frac{1}{x^2}) f[(x-\frac{1}{x})^2]dx;$$

donc $$2A_{2n} = \int_0^\infty (x-\frac{1}{x})^{2n}(x+\frac{1}{x}) f[(x-\frac{1}{x})^2]\frac{dx}{x}. \qquad (\delta)$$

Si dans ($\beta$) on pose $\frac{1}{x} = z$, $x = \frac{1}{z}$, alors $x = \left\{\begin{matrix}\infty \\ 0\end{matrix}\right.$, donne $z = \left\{\begin{matrix}0 \\ \infty\end{matrix}\right.$

et on aura : $B_{2n}=\int_0^\infty x^{2n}f[(x-\frac{1}{x})^2]dx=\int_0^\infty z^{2n}f[(z-\frac{1}{z})^2]dz$

$$=\int_\infty^0 -\frac{1}{x^{2n}}f[(\frac{1}{x}-x)^2]\frac{dx}{x^2}=\int_0^\infty \frac{1}{x^{2n+1}}f[(x-\frac{1}{x})^2]\frac{dx}{x};$$

comme on a aussi $B_{2n}=\int_0^\infty x^{2n+1}f[x-\frac{1}{x})^2]\frac{dx}{x}$,

il vient, en ajoutant :

$$2B_{2n}=\int_0^\infty (x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}})f[(x-\frac{1}{x})^2]\frac{dx}{x}. \qquad (\varepsilon)$$

Mais on a : (Cauchy, *Cours d'Anal. algéb.*, note VIII, p. 550).

$$x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}}=(x+\frac{1}{x})\left[1+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}(x-\frac{1}{x})^2+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(x-\frac{1}{x})^4+\text{etc.}\right].$$

En multipliant celle-ci par $f[(x-\frac{1}{x})^2]dx$, et en intégrant entre les limites $0$, $\infty$, puis en ayant égard aux formules ($\delta$) et ($\varepsilon$), on trouve immédiatement la form. cherchée ($a$).

*Exemp.* Soit $f(x)=e^{-sx}$, $s>0$, on a : $A_0=\int_0^\infty e^{-sx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}$,

$$A_{2n}=\int_0^\infty x^{2n}e^{-sx^2}dx=\frac{1\cdot 2\ldots 2n-1}{2^{n+1}s^{n+\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi};\ B_{2n}=\int_0^\infty x^{2n}e^{s(x-\frac{1}{x})^2}dx$$

$$=e^{2s}\int_0^\infty x^{2n}e^{-s(x^2+\frac{1}{x^2})}dx;$$

donc on a par la formule ($a$) :

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-s(x^2+\frac{1}{x^2})}dx=\frac{\sqrt{\pi}\,e^{-2s}}{2\sqrt{s}}\left[1+\frac{(n+1)n}{2}(\frac{1}{2s})+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4}(\frac{1}{2s})^4+\text{etc.}\right]$$

*Remarque.* La formule ($a$) est due à M. Cauchy. (Voir *Exercices de Mathématiques*, 1826, p. 54).

2^me Théorème.

*n étant un nombre entier et positif, soit* $A_{2n+2}$ *la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{f(x)dx}{x^{2n+2}\sqrt{1-x^2}} = A_{2n+2}, \qquad (\alpha)$$

*en désignant par* $B_{2m}$ *la valeur inconnue de l'intégrale*

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\int_0^\infty x^{2m} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = B_{2m}, \qquad (\beta)$$

*je dis que l'on aura :*

$$B_{2m} = 2A_2 - \frac{(m+1)m}{1\cdot2\cdot3}2^3A_4 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}2^5A_6 - \text{etc.} \qquad (61')$$

*Démonstrat.* Faites dans $(\alpha)$

$$x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2(1-z^2)dz}{1+z^2};$$

les limites $x = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, donnent $z = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, donc :

$$A_{2n+2} = \frac{1}{2^{2n+1}}\int_0^1 \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n+2} f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{dz}{1+z^2};$$

$$\int_0^1 \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n+1} f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{dz}{z} = 2^{2n+1}A_{2n+2}. \qquad (\gamma)$$

Mais on a :

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\left(z^{2m+1}+\frac{1}{z^{2m+1}}\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right) - \frac{(m+1)m}{1\cdot2\cdot3}\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(z+\frac{1}{z}\right)^5 - \text{etc.}$$

Donc en multipliant les deux membres de celle-ci par $f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{dz}{z}$, puis en intégrant entre 0 et 1, on aura :

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\left[\int_0^1 z^{2m} f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)dz + \int_0^1 \frac{1}{z^{2m+2}} f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)dz\right] =$$

$$2A_2 - \frac{(m+1)m}{1\cdot2\cdot3}2^3A_4 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}2^5A_6 - \text{etc.}$$

Pour $x=\frac{1}{z}$, $\frac{2z}{1+z^2}=\frac{2x}{1+x^2}$, $\frac{dz}{z^{2m+2}}=-x^{2m}dx$,

$z=\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ donne $x=\left\{\begin{matrix}\infty\\1\end{matrix}\right.$;

par suite, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{z^{2m+2}}\,\mathrm{f}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)dz=\int_1^\infty x^{2m}\,\mathrm{f}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx,$$

donc l'égalité précédente devient :

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\int_0^\infty x^{2m}\,\mathrm{f}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=2\,\mathrm{A}_2-\frac{(m+1)m}{1\cdot2\cdot3}2^3\mathrm{A}_4+\text{etc.}$$

*Exemple.* Soit $\mathrm{f}(x)=e^{-\frac{p}{x}}\sqrt{1-x^2}$; pour $x=\frac{1}{z}$, on aura :

$$\mathrm{A}_{2n+2}=\int_0^1 \frac{1}{x^{2n+2}}e^{-\frac{p}{x}}dx=\int_1 z^{2n}e^{-pz}dz=$$

$$\frac{d^{2n}}{dp^{2n}}\left[\int_1^\infty e^{-pz}dz\right]=\frac{d^{2n}}{dp^{2n}}\left(\frac{e^{-p}}{p}\right).$$

Comme on a :

$$\mathrm{f}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=e^{-p\left(\frac{1+x^2}{2x}\right)}\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}e^{-\frac{1}{2}p\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

on trouve, par la form. (61′) :

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\int_0^\infty \frac{1-x^2}{1+x^2}x^{2m}\cdot e^{-\frac{1}{2}p\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx=2\left(\frac{e^{-p}}{p}\right)-$$

$$\frac{(m+1)m}{1\cdot2\cdot3}2^3\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{-p}}{p}\right)+\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}2^5\frac{d^4}{dp^4}\left(\frac{e^{-p}}{p}\right)-\text{etc.}$$

### 13me MÉTHODE.

*Détermination de la valeur des intégrales définies par les méthodes de Cauchy.*

### 1re MÉTHODE.

La 1re méthode de Cauchy, ne diffère pas, quant au principe, de la méthode 5me. Elle consiste dans des intégrations

doubles effectuées, dans des sens contraires. Mais la considération de la correction $\Delta$, et par suite l'emploi des intégrales singulières, a conduit cet éminent géomètre à une foule de formules très-générales, qui contiennent presque toutes les intégrales définies connues et une infinité d'autres. Nous allons donner ici les plus remarquables de ces formules. Elles sont toutes des cas particuliers de la formule fondamentale (79) du 1[er] livre, que nous écrirons sous cette forme :

$$(A)\quad \int_a^b [\psi(x+\beta\sqrt{-1})dx - \int_a^b \psi(x+\alpha\sqrt{-1})dx =$$

$$\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \psi(b+y\sqrt{-1})dy - \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \psi(a+y\sqrt{-1})dy - \Delta.$$

$a$ et $b$ sont les limites des intégrales relatives à $x$; $\alpha$ et $\beta$ celles qui se rapportent aux intégrations par rapport à $y$. De plus, si l'on pose

$$\frac{1}{\psi(x)} = 0, \text{ ou } \psi(x) = \infty,$$

et qu'on désigne par $x_1 = c + e\sqrt{-1}$, $x_2 = c_1 + e_1\sqrt{-1}$, etc. les racines de ces équations, dans lesquelles les coëfficients de $\sqrt{-1}$ sont positifs, alors en fesant

$$\theta = dc\cdot\psi[c + dc + e\sqrt{-1}], \quad \theta_1 = dc\cdot\psi[c_1 + dc + e_1\sqrt{-1}], \text{ etc.}$$

on aura :

$$(B)\quad \Delta = 2\pi[\theta + \theta_1 + \ldots]\sqrt{-1}.$$

Les parties réelles $c$, $c_1$, etc. sont sensées comprises entre les limites $a$ et $b$ relatives à $x$, et les coëfficients $e$, $e_1$, etc. de $\sqrt{-1}$, entre les limites $\alpha$ et $\beta$. Observons encore, que l'une quelconque des quantités $\theta$ doit être réduite à moitié, si, dans la racine correspondante, la partie réelle se confond avec l'une des limites $a$, $b$, ou le coëfficient de $\sqrt{-1}$ avec l'une des limites $\alpha$ et $\beta$. En outre, $\Delta$ est nul, lorsque la fonction $\psi(x)$ est continue, ou qu'étant discontinue entre les limites des intégrations, l'équation $\psi(x) = \infty$, n'a pas de racines dont les coëfficients de $\sqrt{-1}$ soient positifs.

### 1^er Cas.

*La fonction* $\psi(\mathrm{x})$ *donne* $\psi(\mathrm{x}+\mathrm{y}\sqrt{-1})=0$
*pour* $\mathrm{x}=\infty$, *quelque soit* y.

Dans ce cas, les limites par rapport à $x$, étant $x=\left\{\begin{matrix} b=\infty \\ \\ a=0 \end{matrix}\right.$, celles par rapport à $y$ étant $y=\left\{\begin{matrix} \beta=k \\ \\ \alpha=0 \end{matrix}\right.$, la formule (A) donne :

$$\text{(I.)}\quad \int_0^\infty \psi(x+k\sqrt{-1})dx=\int_0^\infty \psi(x)dx-\sqrt{-1}\int_0^k \psi(y\sqrt{-1})dy-\Delta.$$

*Exemple.* Soit $\psi(x)=e^{-x^2}$; $\psi(x\sqrt{-1})=e^{x^2}$, $\psi(x+k\sqrt{-1})=e^{-(x+k\sqrt{-1})^2}$; la fonction $\psi(x)$ restant continue, on a ici $\Delta=0$.

L'équation (I) donne :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cdot e^{-2kx\sqrt{-1}}dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}-\sqrt{-1}\int_0^k e^{x^2}dx\,; \quad \text{ou}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2kxdx-\sqrt{-1}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2kxdx=$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-k^2}-\sqrt{-1}\,e^{-k^2}\int_0^k e^{x^2}dx\,;$$

d'où : $$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2kxdx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot e^{-k^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2kxdx=e^{-k^2}\int_0^k e^{x^2}dx.$$

### 2^me Cas.

*La fonction* $\psi(\mathrm{x})$ *donne* $\psi(\mathrm{x}+\mathrm{y}\sqrt{-1})=0$
*pour* $\mathrm{y}=\infty$, *quelque soit* x.

Dans ce cas, soient les limites $x=\left\{\begin{matrix} b=k \\ \\ a=0 \end{matrix}\right.$, $y=\left\{\begin{matrix} \beta=\infty \\ \\ \alpha=0 \end{matrix}\right.$, la form.

(A) devient :

$$(\text{II.})\ \int_0^k \psi(x)dx = \Delta - \sqrt{-1}\int_0^\infty [\psi(k+y\sqrt{-1}) - \psi(y\sqrt{-1})]\,dy.$$

*Exemple.* Soient $\psi(x) = \varphi(x)e^{bx\sqrt{-1}}$, $b>0$, $y=\frac{x}{b}$,

$\psi(k+y\sqrt{-1}) = \varphi(k+\frac{x}{b}\sqrt{-1})e^{b(k+\frac{x}{b}\sqrt{-1})}$, $\Delta=0$ ; donc

$$\int_0^k \varphi(x)e^{bx\sqrt{-1}}dx = -\sqrt{-1}\int_0^\infty \varphi(k+\frac{x}{b}\sqrt{-1})e^{bk\sqrt{-1}}.e^{-x}dx +$$

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty \varphi(\frac{x}{b}\sqrt{-1})e^{-x}dx;$$

ou : $\int_0^k \varphi(x)\cos bx dx + \sqrt{-1}\int_0^k \varphi(x)\sin bx dx =$

$$\int_0^\infty \chi(\frac{x}{b})e^{-xdx} + \sqrt{-1}\int_0^\infty \varpi(\frac{x}{b})e^{-x}dx.$$

d'où l'on tire :

$$(62)\quad \int_0^k \varphi(x)\cos bx dx = \int_0^\infty \chi(\frac{x}{b})\,e^{-x}dx,$$

$$\int_0^k \varphi(x)\sin bx dx = \int_0^\infty \varpi(\frac{x}{b})e^{-x}dx.$$

Ces formules ont été employées avec avantage par M. Cauchy dans la théorie des ondes (*Savants étrangers*, tom. 1) ; elles servent à obtenir les valeurs des intégrales qui se trouvent au 1^er^ membre, approximativement, au moyen d'une série de fonctions gamma. Soit en effet $b$ un nombre très-grand, et désignons la série obtenue en développant $\chi(\frac{x}{b})$, pour abréger, par

$$\chi(\frac{x}{b}) = \Sigma(\frac{x}{b})^{n-1};$$

on aura, à la place de la 1^re^ des fonct. (62), la série très-convergente : $\int_0^k \varphi(x)\cos bx dx = \Sigma[\frac{1}{b^{n-1}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx] = \Sigma[\frac{\Gamma(n)}{b^{n-1}}]$.

### 3<sup></sup>me CAS.

*La fonction* $\psi(x)$ *donne* $\psi(x+y\sqrt{-1})=0$, *pour* $x=\pm\infty$, *quelque soit* y.

Dans ce cas, soient les limites $x=\left\{\begin{matrix} b=\infty \\ a=-\infty \end{matrix}\right.$, $y=\left\{\begin{matrix} \beta=k \\ \alpha=0 \end{matrix}\right.$, la form. (A) deviendra :

$$\text{(III)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x+k\sqrt{-1})dx=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx-\Delta.$$

*Exemple.* Soit $\psi(x)=(k-x\sqrt{-1})^{a-1}e^{-x^2}$; on a encore $\Delta=0$,

$\psi(x+k\sqrt{-1})=[2k-x\sqrt{-1}]^{a-1}e^{-x^2-2kx\sqrt{-1}}e^{k^2}$; donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}[2k-x\sqrt{-1}]^{a-1}e^{-x^2}.e^{-2kx\sqrt{-1}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}(k-x\sqrt{-1})^{a-1}dx.$$

Pour $a=1$, on trouve :

$$2k\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2kx-\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}dx\sin 2kxdx=k\sqrt{\pi}\,e^{-k^2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}\cos 2kx+2k\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\sin 2kxdx=\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}dx.$$

### 4me CAS.

*La fonction* $\psi(x)$ *donne* $\psi(x+y\sqrt{-1})=0$, *pour* $x=\infty$, *quelque soit* y; *et pour* $y=\infty$, *quelque soit* x.

Dans ce cas, en prenant pour limites

$$x=\left\{\begin{matrix} b=\infty \\ a=0 \end{matrix}\right., \quad y=\left\{\begin{matrix} \beta=\infty \\ \alpha=0 \end{matrix}\right.,$$

la form. (A) donnera :

$$\text{(IV)} \qquad \int_{0}^{\infty}\psi(x)dx=\sqrt{-1}\int_{0}^{\infty}\psi(y\sqrt{-1})dy+\Delta.$$

*Exemple.* Soit $\psi(x)=[e^{-x}-\frac{1}{1+x}]\frac{1}{x}$; on aura $\Delta=0$,

$$\psi(y\sqrt{-1})=[e^{-y\sqrt{-1}}-\frac{1}{1+y\sqrt{-1}}]\frac{1}{y\sqrt{-1}},$$

$$\int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right] \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \left[e^{-y\sqrt{-1}} - \frac{1-y\sqrt{-1}}{1+y^2}\right] \frac{dy}{y}.$$

Comme on a : $\int_0^\infty \left[\sin y - \frac{y}{1+y^2}\right] \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0$,

on trouve : $\int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right] \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \left[\cos y - \frac{1}{1+y^2}\right] \frac{dy}{y}$.

5$^{me}$ Cas.

*La fonction* $\psi(x)$ *donne* $\psi(x+y\sqrt{-1})=0$, *pour* $x=-\infty$, *quelque soit* $y$, *et pour* $y=\infty$ *quelque soit* $x$.

Dans ce cas, en prenant pour limites

$$x = \left\{\begin{matrix} b=0 \\ \\ a=-\infty \end{matrix}\right., \quad y = \left\{\begin{matrix} \beta=\infty \\ \\ \alpha=0 \end{matrix}\right.,$$

la form. (A) donnera :

$$\text{(V)} \qquad \int_{-\infty}^0 \psi(x)dx = -\sqrt{-1} \int_0^\infty \psi(y\sqrt{-1})dy + \Delta.$$

6$^{me}$ Cas.

*La fonction* $\psi(x)$ *donne* $\psi(x+y\sqrt{-1})=0$, *pour* $y=\pm\infty$, *quelque soit* $x$.

Dans ce cas prenons $y = \left\{\begin{matrix} \beta=\infty \\ \\ \alpha=-\infty \end{matrix}\right.$, la form. (A) donnera :

$$\text{(VI)} \quad \int_{-\infty}^\infty [\psi(b+y\sqrt{-1}) - \psi(a+y\sqrt{-1})]dy = \frac{\Delta}{\sqrt{-1}}.$$

Les valeurs $c, c_1$, etc. des racines de l'équation $\psi(x)=\infty$, demeurent comprises entre $a$ et $b$.

*Remarque.* Supposons qu'on ait en outre $\psi(x+y\sqrt{-1})=0$ pour $x=\infty$, ou bien pour $x=-\infty$ ; alors soit

$$x = \left\{\begin{matrix} b=k \\ \\ a=-\infty \end{matrix}\right., \text{ ou } x = \left\{\begin{matrix} b=\infty \\ \\ a=-k \end{matrix}\right.,$$

on aura : (VII) $$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\psi(k+y\sqrt{-1})dy=\frac{\Delta}{\sqrt{-1}},\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\psi(-k+y\sqrt{-1})dy=-\frac{\Delta}{\sqrt{-1}}.\end{array}\right.$$

Ces équations sont utiles dans l'intégration des équations différentielles linéaires; et dans la résolution des équations à l'aide des intégrales définies. (Voir Cauchy, 19e cah. poly.).

7me Cas.

*La fonction* $\psi(x)$ *donne* $\psi(x+y\sqrt{-1})=0$, *pour* $x=\pm\infty$, *quelque soit* y, *et pour* $y=\pm\infty$, *quelque soit* x.

Dans ce cas, prenons pour limites

$$x=\left\{\begin{array}{l}b=\infty\\ \\ a=-\infty\end{array}\right., \quad y=\left\{\begin{array}{l}\beta=\infty\\ \\ \alpha=-\infty\end{array}\right.,$$

la form. (A) donnera généralement

$$\Delta=0. \qquad \text{(VIII)}$$

Lorsque l'équation $\psi(x)=\infty$, a une infinité de racines, la formule (VIII) renferme un nombre infini de termes, et peut servir à la sommation des séries. (Voir Cauchy, *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, 1825. p. 43).

8me Cas.

*La fonction* $\psi(x)$ *donne* $\psi(x+y\sqrt{-1})=0$, *pour* $x=\pm\infty$, *quelque soit* y, *et pour* $y=\infty$, *quelque soit* x.

Dans ce cas, en prenant pour limites

$$x=\left\{\begin{array}{l}b=\infty\\ \\ a=-\infty\end{array}\right., \quad y=\left\{\begin{array}{l}\beta=\infty\\ \\ \alpha=0\end{array}\right.,$$

la form. (A) donne :

$$\text{(IX)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx=\Delta.$$

Par suite : (X) $\int_0^{\infty} [\frac{\psi(x)+\psi(-x)}{2}]dx = \frac{1}{2}\Delta.$

1[re] *Remarque.* Si l'on a $\psi(x+y\sqrt{-1})=0$, pour $x=\pm\infty$, quelque soit $y$, et pour $y=-\infty$, quelque soit $x$, alors en prenant pour limites

$$x=\left\{\begin{matrix} b=\infty \\ a=-\infty \end{matrix}\right., \quad y=\left\{\begin{matrix} \beta=0 \\ \alpha=-\infty \end{matrix}\right.,$$

la form. (A) donnera :

(XI) $$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = -\Delta;$$

par suite : (XII) $\int_0^{\infty} [\frac{\psi(x)+\psi(-x)}{2}]dx = -\frac{1}{2}\Delta.$

Ces formules se rapportent au cas où les coëfficients de $\sqrt{-1}$, des racines de l'équation $\psi(x)=\infty$, seraient négatifs.

2[me] *Remarque.* Les expressions (IX) et (X) renferment la plupart des intégrales définies connues. Ces formules étant très-importantes nous allons les appliquer à plusieurs exemples, qui seront encore, pour la plupart, d'une grande généralité.

*Applications de la Formule* (IX).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = \Delta, \qquad \Delta = 2\pi(\theta + \theta_1 + \text{etc.})\sqrt{-1}$$
$$\theta = dc\cdot\psi(c + dc + e\sqrt{-1}),$$
$$\theta_1 = dc\cdot\psi(c_1 + dc + e_1\sqrt{-1}),$$
etc.

$$\psi(x)=\infty, \text{ d'où : } x_1 = c + e\sqrt{-1},$$
$$x_2 = c_1 + e_1\sqrt{-1},$$
etc.

$e$, $e_1$, erc., sont positifs. Les valeurs des $\theta$, correspondantes à des valeurs nulles des coëfficients $e$, doivent être réduites à moitié. Si aucun des coëfficients $e$ n'est positif, on a $\Delta=0$.

1[er] Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)dx}{r-x\sqrt{-1}}, \quad r>0.$$

*Solution.* Pour $\psi(x)=\frac{\mathrm{f}(x)}{r-x\sqrt{-1}}=\infty$, on a $x=-r\sqrt{-1}$; comme le coëfficient de $\sqrt{-1}$ est négatif, on a $\Delta=0$; donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)dx}{r-x\sqrt{-1}}=0. \qquad (63)$$

2$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)dx}{r+x\sqrt{-1}},\quad r>0.$$

*Solution.* $\psi(x)=\frac{\mathrm{f}(x)}{r+x\sqrt{-1}}=\infty$, donne $x_1=r\sqrt{-1}$,

$$\theta=dc\cdot\psi(dc+r\sqrt{-1})=dc\cdot\frac{\mathrm{f}(dc+r\sqrt{-1})}{r+(dc+r\sqrt{-1})\sqrt{-1}}=\frac{\mathrm{f}(r\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}};$$

$\Delta=2\pi\theta\sqrt{-1}=2\pi\mathrm{f}(r\sqrt{-1})$; donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)dx}{r+x\sqrt{-1}}=2\pi\mathrm{f}(r\sqrt{-1}). \qquad (64)$$

3$^{me}$ Exemple.

m *étant un nombre entier,* r *positif, chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)dx}{(r+x\sqrt{-1})^m}.$$

*Solution.* $\psi(x)=\frac{\mathrm{f}(x)}{(r+x\sqrt{-1})^m}=\infty$, donne $m$ racines égales à $r\sqrt{-1}$, on a donc, par la form. (20'') du 1$^{er}$ livre,

$$\theta=\frac{1}{1\cdot2\,..\,m-1}\;\frac{d^{m-1}[dc^m\cdot\psi(dc+r\sqrt{-1})]}{dc^{m-1}}=$$

$$\frac{1}{(\sqrt{-1})^m}\;\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(r\sqrt{-1})}{(\sqrt{-1})^{m-1}1\cdot2\,...\,m-1};$$

$$\Delta = 2\pi\sqrt{-1}\,\theta = (-1)^{m-1}\frac{2\pi f^{(m-1)}(r\sqrt{-1})}{1\cdot 2\ldots m-1}\ ;\quad \text{d'où :}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{(r+x\sqrt{-1})^m} = (-1)^{m-1}2\pi\frac{f^{(m-1)}(r\sqrt{-1})}{1\cdot 2\ldots m-1}. \qquad (65)$$

### 4me Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{l(r-x\sqrt{-1})},\quad 1>r>0.$$

*Solution.* $\psi(x) = \dfrac{f(x)}{l(r-x\sqrt{-1})} = \infty$, donne $l(r-x\sqrt{-1}) = 0$,

$$x_1 = (1-r)\sqrt{-1}),$$

$$\theta = dc\cdot\frac{f[dc+(1-r)\sqrt{-1}]}{l[r-(dc+\overline{1-r}\sqrt{-1})\sqrt{-1}]} = -f[1-r)\sqrt{-1}],$$

$$\Delta = 2\pi\,\theta\sqrt{-1} = -2\pi f[\overline{1-r}\sqrt{-1}]\sqrt{-1}\ ;\quad \text{d'où :}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{l(r-x\sqrt{-1})} = -2\pi f[(1-r)\sqrt{-1}]\sqrt{-1}. \qquad (66)$$

Pour $r=1$, le coëefficient de $\sqrt{-1}$ étant nul, on réduira (66) à moitié. Pour $r>1$, $l(r-x\sqrt{-1}) = 0$ n'a pas de racines dont le coëfficient de $\sqrt{-1}$ est positif, et alors $\Delta = 0$.

*Applications de la Formule* (X).

$$\int_0^{\infty}\frac{\psi(x)+\psi(-x)}{2}dx = \tfrac{1}{2}\Delta.$$

### 5me Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{dx}{x}.$$

*Solution.* $\psi(x)=\dfrac{f(x)}{x\sqrt{-1}}=\infty$, donne $x=0$;

$$\theta=dc\,\psi(dc)=dc\cdot\frac{f(dc)}{dc\sqrt{-1}}=\frac{f(0)}{\sqrt{-1}}\,;\quad \tfrac{1}{2}\theta=\frac{f(0)}{2\sqrt{-1}}\,,$$

$$\Delta=2\pi\sqrt{-1}\times\tfrac{1}{2}\theta=\pi f(0)\,,\quad \tfrac{1}{2}\Delta=\frac{\pi}{2}f(0)\,;\quad \text{donc}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}f(0). \qquad (67)$$

### 6<sup>me</sup> Exemple.

r *étant positif, chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty\left[\frac{f(x)}{r+x}+\frac{f(-x)}{r-x}\right]dx.$$

*Solution.* $\psi(x)=\dfrac{2f(x)}{r+x}=\infty$, donne $x=-r$; donc

$$\theta=dc\cdot\psi(-r+dc)=dc\cdot\frac{2f(-r+dc)}{dc}=2f(-r)\,;\quad \tfrac{1}{2}\theta=f(-r)\,;$$

$\tfrac{1}{2}\Delta=\dfrac{\pi}{2}f(-r)\sqrt{-1}$. Donc

$$\int_0^\infty\left[\frac{f(x)}{r+x}+\frac{f(-x)}{r-x}\right]dx=\frac{\pi}{2}f(-r)\sqrt{-1}. \qquad (68)$$

### 7<sup>me</sup> Exemple.

r *étant positif, chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^\infty\frac{f(x)+f(-x)}{2}\cdot\frac{rdx}{x^2+r^2}\,,\quad \int_0^\infty\frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{xdx}{x^2+r^2}.$$

*Solution.* 1° $\psi(x)=\dfrac{rf(x)}{x^2+r^2}=\infty$, donne $x^2+r^2=0$, $x=r\sqrt{-1}$,

$$\theta=\frac{f(r\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,,\quad \tfrac{1}{2}\Delta=\frac{\pi}{2}f(r\sqrt{-1})\,;\quad \text{donc}$$

$$\int_0^\infty\frac{f(x)+f(-x)}{2}\cdot\frac{rdx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}f(r\sqrt{-1}). \qquad (69)$$

2° $\psi(x)=\frac{x\,\mathrm{f}(x)}{\sqrt{-1}\,(x^2+r^2)}=\infty$, donne $x=r\sqrt{-1}$, $\theta=\frac{\mathrm{f}(r\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$,

$\frac{1}{2}\Delta=\frac{\pi}{2}\mathrm{f}(r\sqrt{-1})$; donc

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\mathrm{f}(r\sqrt{-1})\,. \qquad (70)$$

*Remarque.* Si dans les form. (69), (70), on pose

$$\mathrm{f}(x)=e^{ax\sqrt{-1}}\,,$$

on reproduit respectivement les formules de Laplace :

$$\int_0^\infty \frac{r\cos ax}{x^2+r^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-ar}\,,\qquad \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+r^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-ar}.$$

*Corollaire* 1. Si dans les form. (69) et (70), on change $\mathrm{f}(x)$ en $\mathrm{f}(-x\sqrt{-1})$, $\mathrm{f}(r\sqrt{-1})$ devient $\mathrm{f}(r)$, et $r$ est alors essentiellement positif; par conséquent ces formules, pour $r$ positif deviennent respectivement :

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(-x\sqrt{-1})+\mathrm{f}(x\sqrt{-1})}{2}\cdot\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\mathrm{f}(r),\ r>0, \qquad (69')$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(-x\sqrt{-1})-\mathrm{f}(x\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\mathrm{f}(r),\ r>0, \qquad (70'')$$

On peut donner à ces expressions une forme plus simple, en posant

$$\mathrm{f}(x\sqrt{-1})=\varphi(x)-\sqrt{-1}\,\psi(x)\,;$$
$$\mathrm{f}(-x\sqrt{-1})=\varphi(x)+\sqrt{-1}\,\psi(x)\,;$$

car alors on obtient :

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{f}(r)=\int_0^\infty \varphi(x)\,\frac{r\,dx}{x^2+r^2},\quad r>0, \qquad (69'')$$

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{f}(r)=\int_0^\infty \psi(x)\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2}.\quad r>0, \qquad (70'')$$

*Corollaire* 2. En différentiant ces dernières, $n$ fois de suite par rapport à $r$, on trouve :

$$\frac{\pi}{2} f^{(n)}(r) = \int_0^\infty \frac{d^n}{dr^n} \left\{ \frac{r}{r^2+x^2} \right\} \varphi(x) dx ,$$

$$\frac{\pi}{2} f^{(n)}(r) = \int_0^\infty \frac{d^n}{dr^n} \left\{ \frac{x}{r^2+x^2} \right\} \psi(x) dx.$$

Les différentiations indiquées s'exécuteront aisément en posant :

$$\frac{r}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r - x\sqrt{-1}} + \frac{1}{r + x\sqrt{-1}} \right\},$$

$$\frac{x}{r^2+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1}{r - x\sqrt{-1}} - \frac{1}{r + x\sqrt{-1}} \right\},$$

et l'on obtiendra :

$$\frac{\pi}{2} f^{(n)}(r) = (-1)^n 1 \cdot 2 .. n \int_0^\infty \frac{\cos\left\{(n+1) \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{r}\right\}}{(r^2+x^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \varphi(x) dx , \qquad r > 0, \qquad (69''')$$

$$\frac{\pi}{2} f^{(n)}(r) = (-1)^n 1 \cdot 2 .. n \int_0^\infty \frac{\sin\left\{(n+1) \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{r}\right\}}{(r^2+x^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \psi(x) dx , \qquad r > 0, \qquad (70''')$$

*Corollaire* 3. Si, dans ces dernières, on pose :

$$x = r \operatorname{tg} \xi , \quad \frac{1}{r^2+x^2} = \frac{\cos^2 \xi}{r^2},$$ aux limites

$x \Big\{ {}^{\infty}_{0}$, répondront les limites $\xi = \Big\{ {}^{\frac{\pi}{2}}_{0}$, et l'on aura :

$$\frac{\pi}{2} f^{(n)}(r) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \dots n}{r^{n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(r \operatorname{tg} \xi) \cos^{n-1} \xi \cos (n+1) \xi \, d\xi , \qquad r > 0, \qquad (69^{\text{IV}})$$

$$\frac{\pi}{2} f^{(n)}(r) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \dots n}{r^{n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r \operatorname{tg} \xi) \cos^{n-1} \xi \sin (n+1) \xi \, d\xi . \qquad r > 0. \qquad (70^{\text{IV}})$$

8^me^ Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}\cdot\frac{rdx}{x^2-r^2}, \quad \int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{xdx}{x^2-r^2}.$$

*Solution.* 1° $\psi(x)=\dfrac{r f(x)}{x^2-r^2}=\infty$, donne $x_1=r$, $x_2=-r$; donc

$$\theta=dc\,\psi(r+dc)=\frac{f(r)}{2}, \quad \theta_1=dc\,\psi(-r+dc)=-\frac{f(-r)}{2}.$$

$\frac{1}{2}(\theta+\theta_1)=\dfrac{f(r)-f(-r)}{4}$, $\frac{1}{2}\Delta=\dfrac{\pi}{4}[f(r)-f(-r)]\sqrt{-1}$. Donc

$$\int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}\cdot\frac{rdx}{x^2-r^2}=\frac{\pi}{4}[f(r)-f(-r)]\sqrt{-1}. \quad (71)$$

2° $\psi(x)=\dfrac{x f(x)}{\sqrt{-1}\,(x^2-r^2)}=\infty$, donne $x_1=r$, $x_2=-r$. Donc

$$\theta=\frac{f(r)}{2\sqrt{-1}}, \quad \theta_1=\frac{f(-r)}{2\sqrt{-1}}, \quad \tfrac{1}{2}(\theta+\theta_1)=\frac{f(r)+f(-r)}{4\sqrt{-1}},$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta=\frac{\pi}{4}[f(r)+f(-r)]; \quad \text{d'où :}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{xdx}{x^2-r^2}=\frac{\pi}{4}[f(r)+f(-r)]. \quad (72)$$

*Remarque.* Si dans les form. (71), (72), on fait $f(x)=e^{ax\sqrt{-1}}$, on obtient les form. de Bidone :

$$\int_0^\infty \frac{r\cos axdx}{x^2-r^2}=-\frac{\pi}{2}\sin ar, \quad \int_0^\infty \frac{x\sin axdx}{x^2-r^2}=\frac{\pi}{2}\cos ar.$$

Cette dernière, pour $r=0$, reproduit la form.

$$\int_0^\infty \frac{\sin axdx}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

9^me^ Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(-x)}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{r^2dx}{x(x^2+r^2)}.$$

*Solut.* $\psi(x) = \dfrac{r^2 f(x)}{\sqrt{-1}\, x(x^2+r^2)} = \infty$, donne $x_1 = 0, x_2 = r\sqrt{-1}$;

donc $\theta = dc\,\psi(dc) = dc \cdot \dfrac{r^2 f(dc)}{\sqrt{-1}\, dc\,(dc^2+r^2)} = \dfrac{f(0)}{\sqrt{-1}}$, $\frac{1}{2}\theta = \dfrac{f(0)}{2\sqrt{-1}}$;

$$\theta_1 = dc \cdot \psi(dc + r\sqrt{-1}) = -\frac{f(r\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

$$\Delta = 2\pi(\tfrac{1}{2}\theta + \theta_1)\sqrt{-1} = \pi[f(0) - f(r\sqrt{-1})]; \text{ donc}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(x) - f(-x)}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{r^2 dx}{x(x^2+r^2)} = \frac{\pi}{2}[f(0) - f(r\sqrt{-1})]. \qquad (73)$$

## 2^me MÉTHODE DE CAUCHY.

La 2^me méthode de Cauchy ne diffère pas, quant à son principe, de la méthode 12^me. Voici en quoi elle consiste : soit $\int_0^a f(x)dx$ l'intégrale à déterminer. Décomposez $f(x)$ en deux facteurs P et Q, fonctions de $x$, dont l'un Q puisse être remplacé par une intégrale définie équivalente $A\int_0^b R dz$; A étant une constante, R une fonction de $x$ et de $z$. Supposons, en outre, que l'intégrale $\int_0^a P \cdot R dx$, puisse s'obtenir par les méthodes connues, et que sa valeur soit $\psi(z)$; alors on aura $\int_0^a f(x)dx = A\int_0^b \psi(z)dz$. Dans le cas maintenant où cette dernière intégrale peut s'obtenir par les méthodes connues, la valeur de l'intégrale proposée sera déterminée; dans le cas contraire, on aura une transformée de l'intégrale primitive. Voici un résumé de la méthode.

On a : $\quad f(x) = P \cdot Q$; $Q = A\int_0^b R dz$; $\quad$ donc

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a P \cdot Q\, dx = A\int_0^a P \cdot \int_0^b R\, dz dx = A\int_0^b dz \int_0^a PR\, dx$$

$$= A\int_0^b \psi(z) dz. \qquad (\alpha)$$

1er Exemple.

*Déterminer la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{x+a} x^{-n} e^{-x} dx, \quad n<1.$$

*Solution.* Fesons $P=e^{-x}$, $Q=\frac{1}{x^n}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}e^{-xz}dz.$

(V. form. (24), 2e liv.) On a donc $R=z^{n-1}e^{-xz}$, $PR=z^{n-1}e^{-(1+z)x}$, $\int PR dx=\int z^{n-1}e^{-(1+z)x}dx=z^{n-1}\int e^{-(1+z)x}dx=-\frac{e^{-(1+z)x}}{1+z}+c$; donc

$\psi(z)=\int_0^a PR\,dx=z^{n-1}\cdot\frac{1-e^{-a(1+z)}}{1+z}$. On a de plus $A=\frac{1}{\Gamma(n)}$;

donc, par la form. $(\alpha)$ :

$$\int_0^{x+a} x^{-n} e^{-x}dx=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}\cdot\frac{1-e^{-a(1+z)}}{1+z}dz. \qquad (1$$

*Corollaire.* Pour $a=\infty$, il vient :

$$\int_0^\infty x^{-n}e^{-x}dx=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\frac{z^{n-1}dz}{1+z}=\frac{1}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\pi}{\sin n\pi}.$$

(Voy. form. (56) du 2e liv.) Comme on a :

$$\int_0^\infty x^{-n}e^{-x}dx=\int_0^\infty x^{1-n-1}e^{-x}dx=\Gamma(1-n), \quad \text{il vient :}$$

$$\Gamma(1-n)=\frac{1}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\pi}{\sin n\pi}; \text{ d'où } \Gamma(1-n)\cdot\Gamma(n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}. \qquad (2$$

2me Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m\frac{dx}{x^{a+1}}, \quad a<m;$$

m *est un nombre entier.*

*Solut.* Fesons $P = e^{-sx}(e^{-x}-1)^m$, $Q = \frac{1}{x^{a+1}} = \frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty z^a e^{-xz}dz$ ;

$A = \frac{1}{\Gamma(a+1)}$. On aura $R = z^a e^{-xz}$, $PR = e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^m z^a$,

$$\psi(z) = \int_0^a PR\, dx = z^a \int_0^\infty e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^m dx. \qquad (1$$

Soit $\Delta$ la caractéristique des différences finies, en considérant $s$ comme variable, et soit $\Delta s = 1$ ; alors nous trouverons de la manière suivante la valeur de $\psi(z)$. On a :

$$\Delta \cdot e^{-(s+z)x} = e^{-(s+1+z)x} - e^{-(s+z)x} = e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1) ;$$
$$\Delta^2 \cdot e^{-(s+z)x} = e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^2 ,$$
etc. etc.
$$\Delta^m \cdot e^{-(s+z)x} = e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^m.$$

Donc, la form. (1 devient :

$$\psi(z) = z^a \int_0^\infty [\,\Delta^m \cdot e^{-(s+z)x}\,]\, dx ,$$
$$= z^a \Delta^m \int_0^\infty e^{-(s+z)x} dx ,$$
$$= z^a \Delta^m \left(\frac{1}{s+z}\right). \qquad (1'$$

Soit $a = \lambda + \frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu}{\nu} - 1 + \lambda + 1$, $\lambda$ étant le plus grand entier contenu dans $a$, on aura $\lambda < m$, puis :

$$\psi(z) = z^{\frac{\mu}{\nu}-1} \Delta^m \left(\frac{z^{\lambda+1}}{s+z}\right),$$
$$= z^{\frac{\mu}{\nu}-1} \Delta^m \left\{ z^\lambda - sz^{\lambda-1} + \text{etc.} + (-1)^\lambda s^\lambda + (-1)^{\lambda+1}\frac{s^{\lambda+1}}{s+z} \right\}.$$

Mais comme $\lambda < m$, on a $\Delta^m s = \Delta^m s^2 = \text{etc.} = \Delta s^\lambda = 0$ ; donc

$$\psi(z) = z^{\frac{\mu}{\nu}-1} \times (-1)^{\lambda+1} \Delta^m \left(\frac{s^{\lambda+1}}{s+z}\right).$$

Par suite : $\int_0^\infty \psi(z)dz = (-1)^{\lambda+1}\Delta^m\left[s^{\lambda+1}\int_0^\infty \frac{z^{\frac{\mu}{\nu}-1}dz}{s+z}\right]$. (2

Mais on a :

$$\int_0^\infty \frac{z^{\frac{\mu}{\nu}-1}dz}{s+z} = s^{\frac{\mu}{\nu}-1}\cdot\int_0^\infty \frac{\frac{z^{\frac{\mu}{\nu}-1}}{s^{\frac{\mu}{\nu}-1}}\cdot\frac{dz}{s}}{1+\frac{z}{s}} = s^{\frac{\mu}{\nu}-1}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\mu}{\nu}\pi}$$

$$= s\cdot^{\frac{\mu}{\nu}-1}\frac{\pi}{\sin(a-\lambda)\pi} = (-1)^\lambda s^{\frac{\mu}{\nu}-1}\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Donc :

$$\int_0^\infty \psi(z)dz = -\frac{\pi}{\sin a\pi}\,\Delta^m(s^{\lambda+\frac{\mu}{\nu}}) = -\frac{\pi}{\sin a\pi}\Delta^m(s^a). \quad (3$$

On tire de là, et de l'équation ($\alpha$) :

$$\int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m\frac{dx}{x^{a+1}} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty \psi(z)dz = -\frac{\pi}{\Gamma(a+1)\sin a\pi}\Delta^m(s^a). \quad (a)$$

Cette intégrale a été donnée par Laplace (*Calcul des Probabilités*, 2e édit., pag. 163).

*Corollaire* 1. Cherchons ce que devient ($a$), quand on suppose $\frac{\mu}{\nu}=0$, $a=\lambda=$ un entier.

Pour cela, déterminons la vraie valeur de $\frac{\Delta^m(s^a)}{\sin a\pi}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$, pour $a=0$, limite inférieure de l'intégrale $\int_0^\infty \psi(z)dz$. Or, on a :

$$\frac{\Delta^m(s^a)}{\sin a\pi} = \frac{\frac{d\Delta^m(s^a)}{da}}{\frac{d\sin a\pi}{da}} = \frac{\Delta^m(\frac{ds^a}{da})}{\pi\cos a\pi} = \frac{\Delta^m(s^a l\cdot s)}{\pi\cos a\pi} = (-1)^a\frac{\Delta^m(s^a l\cdot s)}{\pi};$$

donc : $$\int_0^\infty \psi(z)dz = (-1)^{a+1}\Delta^m(s^a l\cdot s) ;$$

par suite : $$\int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{(-1)^{a+1}}{\Gamma(a+1)}\Delta^m[s^a l\cdot s]. \quad (4$$

Pour $a=1$, cette dernière devient :

$$\int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^2} = \Delta^m(sl\cdot s).$$

Cette intégrale a été donnée par Laplace, *Calcul des probabilités*, p. 165.

*Coroll.* 2. Si l'on pose dans (4, $e^{-x}=t, m=r, \Gamma(a+1)=1\cdot 2\ldots a$, on trouve :

$$\int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m \frac{dx}{x^{a+1}} = -\int_1^0 \frac{t^{s-1}(t-r)^r dt}{(l\cdot t)^{a+1}}(-1)^{a+1} =$$

$$\int_0^1 \frac{t^{s-1}(t-1)^r}{(l\cdot t)^{a+1}}(-1)^{a+1} = \frac{(-1)^{a+1}\Delta^r s^a l\cdot s}{1\cdot 2\ldots a} ;$$

donc : $$\int_0^1 \frac{t^{s-1}(t-r)^r}{(l\cdot t)^{a+1}} dt = \frac{1}{1\cdot 2\ldots a}\Delta^r(s^a l\cdot s). \quad (5$$

*Corollaire* 3. Changeons dans celle-ci, $t$ en $t^n$, on aura :

$$\int_0^1 \frac{t^{ns-1}(t^n-1)^r dt}{(l\cdot t)^{a+1}} = \frac{n^a}{1\cdot 2\ldots a}\Delta^r(s^a l\cdot s).$$

Fesons $a+1=r$, donc $a<r$, on pourra écrire :

$$n^a\Delta^r(s^a l\cdot s) = \Delta^r[(ns)^a l(ns)],$$

par conséquent la formule précédente devient :

$$\int_0^1 \left(\frac{t^n-1}{l\cdot t}\right)^r \cdot t^{ns-1}dt = \frac{1}{1\cdot 2\ldots(r-1)}\Delta^r[(ns)^a l(ns)]. \quad (6$$

Cette intégrale a été donnée par Legendre, *Exercices de calcul intégral*, p. 372.

*Corollaire* 4. On peut encore obtenir $\psi(z)$ par un procédé indépendant des différences finies, et par suite, l'intégrale proposée sans recourir au calcul des différences. En effet, en intégrant par parties, on trouve successivement :

$$\int_0^\infty e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^m dx = \frac{m}{s+z}\int_0^\infty e^{-(s+z+1)x}(e^{-x}-1)^{m-1}dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-(s+z+1)x}(e^{-x}-1)^{m-1}dx = \frac{m-1}{s+z+1}\int_0^\infty e^{-(s+z+2)x}(e^{-x}-1)^{m-2}dx,$$

etc. etc.

Donc, en multipliant par ordre, et en réduisant :

$$\int_0^\infty e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^m dx = \frac{1\cdot 2\ldots m}{(z+s)(z+s+1)\ldots(s+z+m)}.$$

On a donc :

$$\psi(z) = z^a\int_0^\infty e^{-(s+z)x}(e^{-x}-1)^m dx = \frac{1\cdot 2\ldots m\cdot z^a}{(z+s)(z+s+1)\ldots(z+s+m)}; \quad (7$$

par suite :

$$\int_0^\infty e^{-sx}(e^{-x}-1)^m\frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty\frac{z^a dz}{(z+s)(z+s+1)\ldots(z+s+m)}. \quad (8$$

L'intégrale du 2[d] membre se déterminerait, en décomposant la fraction sous le signe $\int$ en fractions simples.

*Corollaire* 5. Si l'on compare entre elles les deux valeurs de $\psi(z)$ continues dans les formules (1' et (7, on obtient :

$$\Delta^m\left(\frac{1}{s+z}\right) = \frac{1\cdot 2\ldots m}{(s+z)(s+z+1)\ldots(s+z+m)} =$$

$$\frac{\Gamma(m+1)\cdot 1\cdot 2\ldots(s+z-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots(s+z+m)} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(s+z)}{\Gamma(s+z+m+1)}.$$

Pour $z=0$, on a :

$$\Delta^m\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(s)}{\Gamma(s+m+1)} = \int_0^\infty\frac{x^m dx}{(1+x)^{s+m+1}}.$$

M. Cauchy, traite par la même méthode, un grand nombre d'intégrales remarquables, pour lesquelles nous renvoyons au Mémoire de l'auteur. (*Journal de l'Ecole polytechnique*, t. XVII, 28[e] cah., p. 147).

## 14me Méthode.

### *Détermination de la valeur des intégrales définies par approximation.*

Lorsqu'on ne peut pas obtenir, par les méthodes connues, la valeur d'une intégrale définie sous forme finie, on n'a plus d'autre ressource que d'en faire l'évaluation approximativement, soit par le développement en séries, ou géométriquement, par la détermination approchée de l'aire curviligne comprise entre les limites de l'intégration. Nous donnerons ici les quelques théorèmes élémentaires sur lesquels reposent l'un et l'autre procédé.

### 1er Théorème.

*Supposons que la série*

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.} + u_n + \text{etc.}, \qquad (\alpha)$$

*dont les différents termes sont des fonctions continues de* x , *depuis* x = a , *jusqu'à* x = b , *soit convergente, je dis que la série nouvelle*

$$(74) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \text{etc.} + \int_a^b u_n dx + \text{etc.}$$

*sera également convergente.*

*Démonst.* En effet, en posant $\int_a^b u_0 dx = U_0, \int_a^b u_1 dx = U_1$, etc.

$\int_a^b u_n dx = U$ , etc., on aura :

$$\int_a^b f(x)dx = U_0 + U_1 + \text{etc.} + U_n + \text{etc.} \qquad (\beta)$$

Or, la série $(\alpha)$ étant convergente, on a $u_n = 0$, pour $n$ infini. Par conséquent, dans la même hypothèse de $n$, on aura $U_n = \int_a^b u_n dx = 0$; donc la série $(\beta)$ est convergente.

*Remarque.* Admettons que la série $(\alpha)$ reste convergente pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $a$ et $b$, mais qu'elle devienne divergente pour l'une de ces limites, ou pour toutes les deux ; alors

1° Si la divergence a lieu pour $x=a$, la série

$$\int_{a+da}^{b} f(x)dx = \int_{a+da}^{b} u_0 dx + \int_{a+dx}^{b} u_1 dx + \text{etc.}, \quad \text{sera convergente.}$$

2° Si la divergence arrive pour $x=b$, la série

$$\int_{a}^{b-db} f(x)dx = \int_{a}^{b-db} u_0 dx + \int_{a}^{b-db} u_1 dx + \text{etc.}, \quad \text{sera convergente.}$$

3° Si la divergence a lieu pour $x=a$ et $x=b$, la série

$$\int_{a+da}^{b-db} f(x)dx = \int_{a+da}^{b-db} u_0 dx + \int_{a+da}^{b-db} u_1 dx + \text{etc.}, \quad \text{sera convergente.}$$

Il est bien entendu qu'il faudra ici comme dans tous les cas analogues, poser $da=0$, $db=0$, après les intégrations. (Voir l'introduction).

## 2$^{me}$ Théorème.

f(x) *étant une fonction continue pour toutes les valeurs de* x, *depuis* x = a *jusqu'à* a = b, *si l'on suppose* b — a = mh, *je dis que la somme*

$$h\,[\,f(a)+f(a+h)+f(a+2h)\,\ldots+f(a+\overline{m-1}\,h)\,], \quad (\alpha)$$

*s'approchera indéfiniment de l'expression* $\int_a^b f(x)dx$, *à mesure que le nombre* m *augmente.*

*Démonstration.* Comme on a $h=\dfrac{b-a}{m}$, l'on voit que $h$ diminue à mesure que $m$ augmente; de plus, pour $m$ infiniment grand, l'expression $\dfrac{b-a}{m}$ deviendra une différentielle telle que $da$. Or, en mettant la somme ($\alpha$) sous la forme

$$\frac{b-a}{m}\left[\,f(a)+f\left(a+\frac{b-a}{m}\right)+f\left(a+2\,\frac{b-a}{m}\right)+\ldots+f\left(a+\overline{n-1}\,\frac{b-a}{m}\right)\right],$$

on aura, pour $m$ infiniment grand :

$$da\,[f(a)+f(a+da)+f(a+2da)+\ldots+ f(a+\overline{m-1}\,da)] = \int_a^b f(x)dx\,;$$

d'où il suit que $\int_a^b f(x)dx$ différera d'autant moins de la somme ($\alpha$),

que $m$ sera plus grand ; on pourra donc écrire, pour de grandes valeurs de $m$ approximativement :

$$\int_a^b f(x)dx = h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+\overline{m-1}\,h)]. \quad (75)$$

Le second membre exprime la somme des rectangles inscrits ayant pour base $h$, et pour hauteurs les ordonnées $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$, ... $f(a+\overline{m-1}\,h)$, de la courbe $y=f(x)$, dont l'aire exacte comprise entre les ordonnées extrêmes $f(a)$, $f(b)$, est exprimée par $\int_a^b f(x)dx$.

1re *Remarque.* On aurait une expression plus approchée de la même aire, si on prenait, pour la représenter, la somme des rectangles ayant pour base $h$, et pour hauteurs respectivement les ordonnées de la courbe $y=f(z)$, qui répondent au milieu de chaque base. Ces ordonnées étant $f(a+\frac{1}{2}h)$, $f(a+\frac{3}{2}h)$, ... $f(a+\frac{m-1}{2}h)$, on aurait approximativement :

$$\int_a^b f(x)dx = h[f(a+\tfrac{1}{2}h) + f(a+\tfrac{3}{2}h) + \ldots + f(a+\frac{m-1}{2}h)]. \quad (76)$$

2me *Remarque.* On peut encore obtenir une valeur a approchée de la même aire, en considérant celle-ci comme peu différente de la somme des trapèzes inscrits à la courbe $y=f(x)$, ayant même hauteur $h$, et étant tous compris entre les ordonnées extrêmes $f(a)$, $f(b)$. Ces trapèzes ayant pour expressions les produits

$$\tfrac{1}{2}h[f(a)+f(a+h)],\ \tfrac{1}{2}h[f(a+h)+f(a+2h)],\ \text{etc.}$$
$$\tfrac{1}{2}h[f(a+\overline{m-1}\,h)+f(b)],$$

il vient, en ajoutant, et en réduisant :

$$\int_a^b f(x)dx = h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+\overline{m-1}\,h) + \tfrac{1}{2}f(b)]. \quad (77)$$

### 3me Théorème.

*Soit* $y=\varphi(x)=A+Bx+Cx^2+$ etc., *l'équation de la courbe parabolique, qui passe par les extrémités des ordonnées* $f(a)$,

f(a + h), f(a + 2h), ... , f(a + $\overline{m-1}$ h), *je dis que l'on aura approximativement :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (78)$$

*Démonstration.* En effet l'aire $\int_a^b \varphi(x)dx$, différera d'autant moins de l'aire $\int_a^b f(x)dx$, que le nombre des ordonnées f($a$), f($a+h$), etc. sera plus grand, c'est-à-dire, que le nombre $m$ sera plus considérable.

*Remarque.* Lorsque la fonction f($x$) est connue, on la développera en série convergente (si cela est possible), et on déterminera la valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$, à l'aide du 1[er] théorème. Mais si la fonction f($x$) est inconnue, et qu'on n'en connaisse qu'un certain nombre de valeurs particulières, répondant aux abscisses

$$a, a+h, a+2h, \ldots\ a+\overline{m-1}\,h,$$

alors il faudra déterminer la valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$, par la form. (78), ou par l'une des formules du 2[e] théorème.

*Exemple.* Si f($x$) désigne la probabilité qu'une personne vit encore après $x$ ans, alors f($x$) sera une fonction inconnue, dont on connaît certaines valeurs particulières au moyen des tables de mortalité ; on pourra donc faire servir l'une des form. (75), (76), (77), (78), au calcul de la vie probable de cette personne. Supposons qu'on demande la vie probable d'un vieillard de 82 ans. La probabilité f($x$) que cet homme vit encore après $x$ ans, devient, d'après les tables de mortalité :

pour $x = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,$

$$f(x) = 1,\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{5}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{2}{10},\ \tfrac{1}{10},\ 0;$$

on a donc, par la form. (77),

$$\int_0^1 f(x)dx = 2\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{10} + \tfrac{5}{10} + \tfrac{3}{10} + \tfrac{2}{10} + \tfrac{1}{10}\right] = 4,60 \text{ ans},$$

C'est la durée moyenne cherchée.

## 1re NOTE

*Sur le développement des intégrales* $\int_0^x e^{-x^2}dx$, $\int_x^\infty e^{-x^2}dx$, *en fractions continues, d'après Jacobi.*
(V. le *Journal de Crelle*, t. VII).

Soit $v = e^{x^2}\int_x^\infty e^{-x^2}dx$, on a, en différentiant :

$$dv = e^{x^2}d\int_x^\infty e^{-x^2}dx + 2e^{x^2}xdx\int_x^\infty e^{-x^2}dx = 2xvdx + e^{x^2}d\int_x^\infty e^{-x^2}dx.$$

Soit, pour un moment, $\int e^{-x^2}dx = \varphi(x) + c$; d'où $e^{-x^2}dx = d\varphi(x)$, $e^{-x^2} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \mathrm{f}(x)$; on a donc, par le principe $\frac{d\int_a^b \mathrm{f}(x)dx}{da} = -\mathrm{f}(a)$, l'expression $d\int_x^\infty e^{-x^2}dx = -e^{-x^2}dx$;

donc $\quad dv = 2xvdx - e^{-x^2}\cdot e^{x^2}dx = (2xv-1)dx.$

De là on tire :

$$\frac{dv}{dx} = 2xv - 1,$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2x\frac{dv}{dx} + 2v,$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = 2x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\cdot 2\frac{dv}{dx},$$

etc. etc.

$$\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} = 2x\frac{d^nv}{dx^n} + 2n\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}.$$

Divisons cette dernière égalité par le produit $1\cdot 2 \ldots n$, il vient :

$$\frac{(n+1)d^{n+1}v}{1\cdot 2\ldots(n+1)dx^{n+1}} = \frac{2x\,d^nv}{1\cdot 2\ldots ndx^n} + \frac{2d^{n-1}v}{1\cdot 2\ldots(n-1)dx^{n-1}}. \quad (1$$

Soit $v_n = \frac{d^nv}{1\cdot 2\ldots ndx^n}$, par suite $v_0 = v$, $v_1 = \frac{dv}{dx} = 2xv - 1$, l'équation (1 pourra s'écrire :

$$(n+1)v_{n+1} = 2xv_n + 2v_{n-1}; \quad (2$$

on en tire, en transposant :

$$-2v_{n-1}=2xv_n-(n+1)v_{n+1}. \qquad (3$$

Pour $n=0$, on a $-2v_{-1}=2xv_0-v_1=2xv-2xv+1=1$.

Multiplions (3 par $x^n$, on aura :

$$-2x^n v_{n-1}=2x^{n+1}v_n-(n+1)x^n v_{n+1}.$$

Multiplions et divisons le dernier terme de celle-ci par $2x^2$, il vient :

$$-2x^n v_{n-1}=2x^{n+1}v_n-(n+1)\frac{2x^{n+2}}{2x^2}v_{n+1}.$$

Soit $q=\frac{1}{2x^2}$, cette dernière devient :

$$-2x^n v_{n-1}=2x^{n+1}v_n-(n+1)2qx^{n+2}v_{n+1}. \qquad (4$$

On peut donner à tous les termes de celle-ci, une forme positive, en observant que $(-1)^{n-1}$, $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$, donnent, pour $n$ pair, la suite des signes $-$, $+$, $-$, qui est celle des termes de (4 ; et pour $n$ impair, la suite des signes $+$, $-$, $+$. Donc en changeant, dans ce second cas, tous les signes, on reproduit ceux des termes de la relation (4. On peut donc écrire, à la place de celle-ci :

$$(-1)^{n-1}2x^n v_{n-1}=(-1)^n 2x^{n+1}v_n+(-1)^{n+1}(n+1)q\cdot 2x^{n+2}v_{n+1}. \qquad (5$$

Or, si nous posons

$$y_{n+1}=(-1)^n 2x^{n+1}v_n,$$

on aura : $y_n=(-1)^{n-1}\cdot 2x^n v_{n-1}$, $y_{n+2}=(-1)^{n+1}2x^{n+2}v_{n+1}$ ;

de plus, $y_0=(-1)^{-1}2v_{0-1}=1$, $y_1=2xv$,

Par là (5 devient :

$$y_n=y_{n+1}+(n+1)q\,y_{n+2}. \qquad (6$$

De (6 on tire, pour $n=0,1,2\ldots n-1,n$,

$$1=y_1+qy_2,$$
$$y_1=y_2+2qy_3,$$
$$y_2=y_3+3qy_4,$$
etc.
$$y_{n-1}=y_n+nqy_{n+1},$$
$$y_n=y_{n+1}+(n+1)qy_{n+2}.$$

On tire de ces relations :

$$\frac{1}{y_1}=1+q\frac{y_2}{y_1}=1+q:\frac{y_1}{y_2},$$
$$\frac{y_1}{y_2}=1+2q\frac{y_3}{y_2}=1+2q:\frac{y_2}{y_3},$$
etc. etc.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=1+nq\frac{y_{n+1}}{y_n}=1+nq:\frac{y_n}{y_{n+1}},$$

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=1+\frac{(n+1)qy_{n+2}}{y_{n+1}}, \qquad \text{ou :}$$

$$\frac{1}{y_1}=1+q:\frac{y_1}{y_2}=1+\frac{q}{1+2q:\frac{y_2}{y_3}},$$

$$=1+\frac{q}{1+}\,\frac{2q}{1+3q:\frac{y_3}{y_4}},$$

etc.,

$$=1+\frac{q}{1+}\frac{2q}{1+}\frac{3q}{1+\ldots}\ldots+\frac{nq}{1+}\frac{(n+1)qy_{n+2}}{y_{n+1}};$$

d'où :

$$y_1=\frac{1}{1+}\frac{q}{1+}\frac{2q}{1+}\frac{3q}{1+\ldots}\ldots+\frac{nq}{1+}\frac{(n+1)qy_{n+2}}{y_{n+1}}.$$

Mais on a :

$$y_1=2xv=2xe^{x^2}\int_x^\infty e^{-x^2}dx;$$

donc :

$$\int_x^\infty e^{-x^2}dx=\frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot y_1=\frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\frac{1}{1+}\frac{q}{1+}\frac{2q}{1+\ldots}\ldots+\frac{nq}{1+}\frac{(n+1)qy_{n+2}}{y_{n+1}}.$$

Dans cette fraction $q=\frac{1}{2x^2}$ est positif.

Démontrons que le reste $\frac{(n+1)q\,y_{n+2}}{y_{n+1}}$ est également positif.

Pour cela on a :

$$v = e^{x^2}\int_x^\infty e^{-x^2}dx = e^{x^2}\int_x^\infty e^{-\tau^2}d\tau.$$

Soit $\tau = t + x$, alors $\tau = \left\{\begin{matrix}\infty\\ x\end{matrix}\right.$, répondent à $t = \left\{\begin{matrix}\infty\\ 0\end{matrix}\right.$, et l'on a :

$$v = e^{x^2}\int_0^\infty e^{-(t+x)^2}dt.$$

Comme $e^{x^2}$ est constant, on peut mettre ce facteur sous le signe $\int$, alors on a :

$$v = \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot e^{-2tx}dt.$$

Différentions celles-ci plusieurs fois de suite par rapport à $x$, il vient :

$$\frac{dv}{dx} = \int_0^\infty (-2t)e^{-t^2} \cdot e^{-2tx}dt,$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \int_0^\infty (-2t)^2 e^{-t^2} \cdot e^{-2tx}dt,$$

etc. etc.

$$\frac{d^nv}{dx^n} = \int_0^\infty (-2t)^n e^{-t^2} \cdot e^{-2tx}dt.$$

Par conséquent :

$$v_n = \frac{1}{1\cdot 2 \ldots n}\int_0^\infty (-2t)^n e^{-t^2} \cdot e^{-2tx}dt,$$

$$= \frac{e^{x^2}}{1\cdot 2 \ldots n}\int_0^\infty (-2t)^n e^{-(t+x)^2}dt,$$

$$= \frac{(-2)^n e^{x^2}}{1\cdot 2 \ldots n}\int_x^\infty (\tau - x)^n e^{-\tau^2}d\tau.$$

Mais on a : $y_{n+1} = (-1)^n 2x^{n+1} v_n$ ;

donc : $$y_{n+1} = \frac{(2x)^{n+1}e^{x^2}}{1\cdot 2 \ldots n}\int_x^\infty (\tau - x)^n e^{-\tau^2}d\tau.$$

Par suite : $y_{n+2} = \dfrac{(2x)^{n+2} e^{x^2}}{1 \cdot 2 \,..\, n(n+1)} \displaystyle\int_x^\infty (\tau - x)^{n+1} e^{-\tau^2} d\tau$ ;

donc : $\dfrac{y_{n+2}}{y_{n+1}} = \dfrac{2x}{n+1} \dfrac{\int_x^\infty (\tau - x)^{n+1} e^{-\tau^2} d\tau}{\int_x^\infty (\tau - x)^{n} e^{-\tau^2} d\tau}$ ; d'où :

$$\frac{(n+1)\frac{1}{2x^2} \cdot y_{n+2}}{y_{n+1}} = \frac{(n+1) q y_{n+2}}{y_{n+1}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\int_x^\infty (\tau - x)^{n+1} e^{-\tau^2} d\tau.}{\int_x^\infty (\tau - x)^{n} e^{-\tau^2} d\tau} .$$

Donc, si $x$ est positif, le reste $\dfrac{(n+1) q y_{n+2}}{y_{n+1}}$ sera positif. On a

donc : $\displaystyle\int_x^\infty e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{2x} \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 +}}}$ etc. à l'infini.

La valeur de $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$, est comprise entre deux réduites consécutives quelconques de cette fraction continue.

*Corollaire* 1. Comme on a

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^x e^{-x^2} dx + \int_x^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ , il vient :}$$

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-x^2}}{x} \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 +}} \text{ etc.}$$

*Corollaire* 2. On a aussi :

$$\int_0^{-x} e^{-x^2} dx = -\int_0^x e^{-x^2} dx = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} + \frac{e^{-x^2}}{2x} \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 +}} \text{ etc.}$$

*Corollaire* 3. On a :

$$\int_{-x}^\infty e^{-x^2} dx = \int_{-x}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} +$$

$$\int_0^{x} {}^{2} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} - \frac{e^{-x^2}}{2x} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 +}} \text{ etc.}$$

## 2me NOTE.

*Formules générales pour la sommation des séries infinies, et composées d'un nombre fini de termes.*

Cette note est le résumé d'une nouvelle méthode de sommation des suites, publié par M. O. Schlömilch, professeur à l'université de Yéna. (Voyez *Neue Methode zur Summirung endlicher und unenldlicher Reihen*, *von* Dr O. Schlömilch, Greifswald, 1849).

### 1er Problème.

*Chercher la somme des suites infinies*

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)\cos x+f(2)\cos 2x+\text{etc.},\quad 0<x<\pi.$$
$$f(1)\sin x+f(2)\sin 2x+\text{etc.}\quad 0<x<\pi.$$

*Solution.* On a, par les form. (69″), (70″),

$$\frac{\pi}{2}f(r)=\int_0^\infty \frac{r}{r^2+z^2}\varphi(z)dz,\ r>0,\ \varphi(z)=\frac{f(-z\sqrt{-1})+f(z\sqrt{-1})}{2},$$

$$\frac{\pi}{2}f(r)=\int_0^\infty \frac{z}{r^2+z^2}\psi(z)dz,\ r>0,\ \psi(z)=\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

En multipliant la 1re par $\sin rx$, la 2de par $\cos rx$, il vient :

$$\frac{\pi}{2}f(r)\sin rx=\int_0^\infty \frac{r\sin rx}{r^2+z^2}\varphi(z)dz, \qquad (\alpha$$

$$\frac{\pi}{2}f(r)\cos rx=\int_0^\infty \frac{z\cos rx}{r^2+z^2}\psi(z)dz. \qquad (\beta$$

Fesons successivement $r=0,1,2,3$, etc., en ne prenant que la moitié de ($\beta$, correspondant à $r=0$, on trouve :

$f(1)\sin x+f(2)\sin(2x)+f(3)\sin 3x+$ etc.

$$=\int_0^\infty\left[\frac{\sin x}{z^2+1}+\frac{2\sin 2z}{z^2+2^2}+\frac{3\sin 3z}{z^2+3^2}+\text{etc.}\right]\varphi(z)dz,$$

$$=\int_0^\infty \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{z(\pi-x)}-e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\varphi(z)dz, \qquad (1$$

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)\cos x+f(2)\cos 2x+f(3)\cos 3x+\text{etc.}$$

$$=\int_0^\infty\left[\frac{1}{2z}+\frac{z\cos x}{z^2+1}+\frac{z\cos 2x}{z^2+z^2}+\frac{z\cos 3x}{z^2+3^2}+\text{etc.}\right]\psi(z)dz\,,$$

$$=\int_0^\infty\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{z(\pi-x)}+e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\psi(z)dz\,,\qquad (2.$$

(1 et (2 sont les sommes demandées; il reste à démontrer que ces séries sont convergentes.

1° *Convergence de la série* (1.

Désignons par L et M respectivement le minimum, et le maximum des valeurs que reçoit la fonction

$$\frac{f(-z\sqrt{-1}+f(z\sqrt{-1}}{2}\,,$$

quand $z$ varie entre 0 et $\infty$. Comme le facteur

$$\frac{e^{z(\pi-x)}-e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\,,$$

reste positif dans cet intervalle, nous aurons :

$$\int_0^\infty\frac{e^{z(\pi-x)}-e^{-(\pi-x)z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot$$

$$\frac{f(-z\sqrt{-1})+f(z\sqrt{-1})}{2}dz>\int_0^\infty\frac{e^{z(\pi-x)}-e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}Ldz\,,\qquad (3$$

$$<\int_0^\infty\frac{e^{z(\pi-x)}-e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}Mdz.\qquad (4$$

Mais on a :

$$\int_0^\infty\frac{e^{(\pi-x)z}-e^{-(\pi-x)z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}dz$$

$$=\int_0^\infty\left[e^{(\pi-x)z}-e^{-(\pi-x)z}\right]dx\cdot\frac{1}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\,,$$

$$=\int_0^\infty [e^{(\pi-x)z}-e^{-(\pi-x)z}]\,dz\cdot\frac{e^{-\pi z}}{1-e^{-2\pi z}},$$

$$=\int_0^\infty [e^{(\pi-x)z}-e^{-(\pi-x)z}]\,dz\,[e^{-\pi z}+e^{-3\pi z}+e^{-5\pi z}+\text{etc.}]$$

$$=\int_0^\infty e^{-zx}dx+\int_0^\infty e^{-(2\pi+x)z}dz+\int_0^\infty e^{-(4\pi+x)z}dz+\text{etc.}-$$

$$\int_0^\infty e^{-(2\pi-x)z}dz-\int_0^\infty e^{-(4\pi-x)z}dz-\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\pi+x}+\frac{1}{4\pi+x}+\text{etc.}-\frac{1}{2\pi-x}-\frac{1}{4\pi-x}-\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}-\frac{2x}{(4\pi)^2-x^2}-\text{etc.},$$

$=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x.$ (Voir Cauchy, *Anal. algéb.*, p. 375).

Donc les relations (3 et (4 deviennent :

$$\int_0^\infty \frac{e^{z(\pi-x)}-e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})+f(z\sqrt{-1})}{2}dz>\tfrac{1}{2}L\cot\tfrac{1}{2}x,$$
$$<\tfrac{1}{2}M\cot\tfrac{1}{2}x.$$

Donc si L et M sont finis, ce qui exige que $f(-z\sqrt{-1})$, $f(z\sqrt{-1})$, restent finis pendant que $z$ varie de 0 à $\infty$, il est clair que la somme

$$f(1)\sin x+f(2)\sin 2x+\text{etc.},$$

étant une moyenne entre les quantités finies

$$\tfrac{1}{2}L\cot\tfrac{1}{2}x,\ \tfrac{1}{2}M\cot\tfrac{1}{2}x,$$

sera elle-même finie, et par suite la série, qui la compose, sera convergente.

2° *Convergence de la série* (2.

On peut mettre le second membre de la série (2 sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{e^{z(\pi-x)}+e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot z\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2z\sqrt{-1}}dz.$$

Le facteur $\dfrac{f(-z\sqrt{-1}) + f(z\sqrt{-1})}{2z\sqrt{-1}} = F$, reste fini de $z=0$ à $z=\infty$ ; puisque nous supposons que $f(-z\sqrt{-1})$, $f(z\sqrt{-1})$, restent finis dans cet intervalle. Cependant pour $z=0$, on a $F=\frac{0}{0}=-f'(0)$. Il faut donc encore que l'expression

$$f'(u+\sqrt{-1}\,z),$$

reste finie pendant que $u$ varie de $0$ à $\infty$, et $z$ de $-\infty$ à $\infty$. Cela posé, nommons $L_1$, $M_1$, respectivement le minimum et le maximum qu'acquiert le facteur F, pendant que $z$ varie de $0$ à $\infty$ ; ces valeurs extrêmes seront finies, et l'on aura :

$$\int_0^\infty \frac{e^{z(\pi-x)}+e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}} \cdot \frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$> \int_0^\infty \frac{e^{z(\pi-x)}+e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}} z\,L_1\,dz, \quad (5$$

$$< \int_0^\infty \frac{e^{z(\pi-x)}+e^{-z(\pi-x)}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} z\,M_1\,dz. \quad (6$$

Mais on a :

$$\int_0^\infty \frac{e^{z(\pi-x)}+e^{-(\pi-x)z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}} z\,dz = \int_0^\infty e^{-zx} z\,dz + \int_0^\infty e^{-(2\pi+x)z} z\,dz +$$

$$\int_0^\infty e^{-(4\pi+x)z} z\,dz + \text{etc.} + \int_0^\infty e^{-(2\pi-x)z} z\,dz + \int_0^\infty e^{-(4\pi-x)z} z\,dz + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2\pi+x)^2} + \frac{1}{(4\pi+x)^2} + \text{etc.} + \frac{1}{(2\pi-x)^2} + \frac{1}{(4\pi-x)^2} + \text{etc.}$$

Les deux séries dont se compose le 2[d] membre étant convergentes pour $0<x<\pi$, ce second membre aura une somme finie, que nous nommerons S ; donc, en ayant égard aux relations (5 et (6, il vient :

$$\tfrac{1}{2} f(0) + f(1)\cos x + f(2)\cos 2x + \text{etc.} = \text{moy.}\left\{ L_1 S,\ M_1 S \right\};$$

or, cette moyenne étant une quantité finie, la série aura une somme, et sera par conséquent convergente. Nous devons observer que l'expression moy. $\left\{ \alpha, \beta \right\}$, doit s'entendre, avec Cauchy, d'une quantité comprise entre $\alpha$ et $\beta$.

*Corollaire* 1. Pour $x=0$, la série (2 donne :

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(1)+\mathrm{f}(2)+\ldots=$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{\mathrm{f}(-z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}dz. \quad (7$$

Cette expression est susceptible d'une légère transformation, car on a :

$$\frac{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}=\frac{e^{2\pi z}+1}{e^{2\pi z}-1}=1+2\frac{1}{e^{2\pi z}-1}.$$

On a donc :

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{\mathrm{f}(-z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}dz=$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(-z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}dz+$$

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{\mathrm{f}(-z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}. \quad (8$$

Mais en multipliant par $dr$, l'expression

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(-z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\;\frac{zdz}{z^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\mathrm{f}(r),$$

et en intégrant entre $r=0$, $\infty$ on aura :

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(-z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}dz\int_0^\infty \frac{zdr}{z^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \mathrm{f}(r)dr;$$

ou, à cause de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{zdr}{z^2+r^2}=\frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(-z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}dz=\int_0^\infty \mathrm{f}(r)dr,$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{f}(z)dz;$$

on a donc : $\frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\text{etc.}=$

$$\int_0^\infty f(z)dz+2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}. \qquad (9$$

*Corollaire* 2. Pour $x=\pi$, la série (2 donne :

$\frac{1}{2}f(0)-f(1)+f(2)-\text{etc.}=$

$$\int_0^\infty \frac{2}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}dz. \qquad (10$$

En retranchant (10 de (7, on a :

$f(1)+f(3)+f(5)+\text{etc.}=$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}\pi z}-e^{-\frac{1}{2}\pi z}}{e^{\frac{1}{2}\pi z}-e^{-\frac{1}{2}\pi z}}\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}dz. \qquad (11$$

Cette dernière expression est susceptible d'une légère transformation, car on a :

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\pi z}-e^{-\frac{1}{2}\pi z}}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}=\frac{e^{\pi z}-1}{e^{\pi z}+1}=1-2\frac{1}{e^{\pi z}+1};$$

donc l'intégrale à droite de (11

$$=\int_0^\infty \frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}dz-$$

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi z}+1}\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$=\int_0^\infty f(z)dz-2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi z}+1}\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

donc : $f(1)+f(3)+f(5)+\text{etc.}=$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty f(z)dz-\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi z}+1}\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \qquad (12$$

*Corollaire* 3. Pour $x=\frac{1}{2}\pi$, la série (1 donne :

$$\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(3)+\mathrm{f}(5)-\text{etc.}=$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}\cdot\frac{\mathrm{f}(-z\sqrt{-1})+\mathrm{f}(z\sqrt{-1})}{2}\,dz. \qquad (13$$

2$^{me}$ PROBLÈME.

*Chercher la somme de chacune des suites infinies :*

$\frac{1}{2}\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(a+1)+\mathrm{f}(a+2)+$ etc.,

$\frac{1}{2}\mathrm{f}(a)-\mathrm{f}(a+1)+\mathrm{f}(a+2)-$ etc.,

$\mathrm{f}(a+1)+\mathrm{f}(a+3)+\mathrm{f}(a+5)+$ etc.,

$\mathrm{f}(a+1)-\mathrm{f}(a+3)+\mathrm{f}(a+5)-$ etc.

*Solution*. Si nous remplaçons dans les form. (9, (10, (12, (13, $\mathrm{f}(z)$ par $\mathrm{f}(a+z)$, on obtient :

1° $\frac{1}{2}\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(a+1)+\mathrm{f}(a+2)+$ etc. $=$

$$\int_0^\infty \mathrm{f}(a+z)dz+2\int_0^1\frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{\mathrm{f}(a-z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(a+z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

donc à cause de (38$^{m}$) :

(I). $\frac{1}{2}\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(a+1)+\mathrm{f}(a+2)+$ etc. $=$

$$\int_0^\infty \mathrm{f}(a+z)dz-\frac{B_1}{1\cdot 2}\mathrm{f}'(a)+\frac{B_3}{1..4}\mathrm{f}'''(a)-\text{etc.}+$$

$$\frac{(-1)^n B_{2n-1}}{1\ldots 2n}\mathrm{f}^{(2n-1)}(a)+\frac{(-1)^{n+1}B_{2n+1}}{1\ldots 2n+2}\cdot\varepsilon M_{2n+1}.$$

2° $\frac{1}{2}\mathrm{f}(a)-\mathrm{f}(a+1)+\mathrm{f}(a+2)-\ldots=$

$$2\int_0^\infty\frac{dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{\mathrm{f}(a-z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(a+z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$=-\frac{(2^2-1)B_1}{1\cdot 2}\mathrm{f}'(a)+\frac{(2^4-1)B_3}{1\ldots 4}\mathrm{f}'''(a)-\text{etc.}+$$

$$\frac{(-1)^n(2^{2n}-1)B_{2n-1}}{1\ldots 2n}\mathrm{f}^{(2n-1)}(a)+\frac{(-1)^{n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1\ldots(2n+2)}\cdot\varepsilon M_{2n+1}. \quad \text{(II)}$$

[ Voir la form. (38$^{IV}$)].

3° $f(a+1) + f(a+3) + f(a+5) + \dots$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(a+z)dz - \int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi z}+1}\cdot\frac{f(a-z\sqrt{-1}\,) - f(a+z\sqrt{-1}\,)}{2\sqrt{-1}},$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(a+z)dz + \frac{(2^1-1)B_1}{1\cdot 2}f'(a) - \frac{(2^3-1)B_3}{1\dots 4}f'''(a) + \dots +$$

$$\frac{(-1)^n(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}}{1\dots 2n}f^{(2n-1)}(a) + \frac{(-1)^{n+1}(2^{2n+1}-1)B_{2n+1}}{1\dots(2n+2)}\cdot\varepsilon M_{2n+1}. \quad \text{(III)}$$

[Voir la form. (38$^{\text{v}}$)].

4° $f(a+1) - f(a+3) + f(a+5) - \text{etc.}$

$$=\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}\cdot\frac{f(a-z\sqrt{-1}\,) + f(a+z\sqrt{-1}\,)}{2},$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{B_0 f(a) - \frac{B_2}{1\cdot 2}f''(a) + \frac{B_4}{1..4}f^{\text{IV}}(a) - \text{etc.} +$$

$$\frac{(-1)^n B_{2n}}{1\dots 2n}f^{(2n)}(a) + \frac{(-1)^{n+1}B_{2n+2}}{1\dots 2n+2}\cdot\varepsilon M_{2n+2}. \quad \text{(IV)}$$

[Voir la form. (38$^{\text{vi}}$)].

Dans ces formules on a $0<\varepsilon<1$, $M_m =$ maxim. de $\dfrac{f^{(m)}(a+z\sqrt{-1}\,) + f^{(m)}(a-z\sqrt{-1}\,)}{2}$, pour les valeurs de $z$ comprises entre 0 et $\infty$.

### 3$^{\text{me}}$ Problème.

*Chercher la somme de chacune des suites finies :*

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(p)$,

$f(1) - f(2) + f(3) - \dots + (-1)^{p-1}f(p)$,

$f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(p-1)$, $p$ étant pair.

$f(1) - f(3) + f(5) - \dots + (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}f(p-1)$, $p$ étant pair.

*Solution.* Fesons dans la formule 1° du problème précédent, $a=0$, et $a=p$, on trouvera, en retranchant le premier résultat du 2$^{\text{d}}$ :

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+\tfrac{1}{2}f(p)=\int_0^\infty f(z)dz-\int_0^\infty f(p+z)dz+$$

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}-$$

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f(p-z\sqrt{-1})-f(p+z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}. \qquad (\alpha$$

Mais en posant dans la 2[de] intégrale à droite $p+z=z'$, on trouve, en supprimant les accents :

$$\int_0^\infty f(z)dz-\int_0^\infty f(p+z)dz=\int_0^\infty f(z)dz-\int_p^\infty f(z)dz,$$

$$=\int_0^\infty f(z)dz+\int_p^\infty f(z)dz-\int_p^\infty f(z)dz,$$

$$=\int_0^p f(z)dz,$$

$$=\int f(p)dp+\text{const.}$$

En substituant cette valeur dans $(\alpha)$ et en ajoutant $\frac{1}{2}f(p)+\frac{1}{2}f(0)$ aux deux membres, on a :

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(p)=\tfrac{1}{2}f(p)+\tfrac{1}{2}f(0)+\int f(p)dp+\text{const.}+$$

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f(-z\sqrt{-1})-f(z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}+$$

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f(p+z\sqrt{-1})-f(p-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$=C+\tfrac{1}{2}f(p)+\int f(p)dp+$$

$$2\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi z}-1}\cdot\frac{f(p+z\sqrt{-1})-f(p-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

On a désigné par C tous les termes indépendants de $p$. Mais si dans la formule ($38^{m}$), on remplace $a$ par $p$, et qu'on désigne par $M_m$ le maxim. de $\frac{f^{(m)}(p+z\sqrt{-1})+f^{(m)}(p-z\sqrt{-1})}{2}$ correspon-

dant aux valeurs de $z$ depuis $z=0$, jusqu'à $z=\infty$, on trouve :

$$\mathrm{f}(1)+\mathrm{f}(2)+\ldots+\mathrm{f}(p)=\mathrm{C}+\tfrac{1}{2}\mathrm{f}(p)+\int\mathrm{f}(p)dp+$$

$$\frac{\mathrm{B}_1}{1\cdot 2}\mathrm{f}'(p)-\frac{\mathrm{B}_3}{1\ldots 4}\mathrm{f}'''(p)+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\mathrm{B}^{2n-1}}{1\ldots 2n}\mathrm{f}^{(2n-1)}(p)+$$

$$\frac{(-1)^n\mathrm{B}'_{2n+1}}{1\ldots 2n+2}\cdot\varepsilon\,\mathrm{M}_{2n+1}. \qquad \text{(V)}$$

2° En traitant de même les formules 2°, 3°, 4°, du problème précédent, on trouvera sans peine :

$$\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(2)+\mathrm{f}(3)-\ldots(-1)^{p-1}\mathrm{f}(p)=\mathrm{C}+(-1)^{p-1}\tfrac{1}{2}\mathrm{f}(p)+$$

$$(-1)^{p-1}\;2\int_0^\infty\frac{dz}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}\cdot\frac{\mathrm{f}(p+z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(p-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$=\mathrm{C}+\tfrac{1}{2}(-1)^{p-1}\mathrm{f}(p)+(-1)^{p-1}\left\{\frac{(2^2-1)\mathrm{B}_1}{1\ldots 2n}\mathrm{f}'(p)-\right.$$

$$\frac{(2^4-1)\mathrm{B}_3}{1\ldots 4}\mathrm{f}'''(p)+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\mathrm{B}_{2n-1}}{1\ldots 2n}\mathrm{f}^{(2n-1)}(p)+$$

$$\left.\frac{(-1)^n(2^{2n+2}-1)\mathrm{B}_{2n+1}}{1\ldots 2n+2}\cdot\varepsilon\,\mathrm{M}_{2n+1}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

$$\mathrm{f}(1)+\mathrm{f}(3)+\ldots+\mathrm{f}(p-1)=\mathrm{C}+\tfrac{1}{2}\int\mathrm{f}(p)dp-$$

$$\int_0^\infty\frac{dz}{e^{\pi z}+1}\cdot\frac{\mathrm{f}(p+z\sqrt{-1})-\mathrm{f}(p-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$=\mathrm{C}+\tfrac{1}{2}\int\mathrm{f}(p)dp-\left\{\frac{(2^1-1)}{1\cdot 2}\mathrm{f}'(p)-\frac{(2^3-1)\mathrm{B}_3}{1\ldots 4}\mathrm{f}'''(p)+\ldots+\right.$$

$$\left.\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n-1}-1)\mathrm{B}_{2n-1}}{1\ldots 2n}\mathrm{f}^{2n-1}(p)+\frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)\mathrm{B}^{2n+1}}{1\ldots 2n+2}\cdot\varepsilon\,\mathrm{M}^{2n+1}\right\} \text{(VII)}$$

[ Voir form. ($38^v$) ].

$$\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(3)+\ldots+(-1)^{\frac{1}{2}p-1}\mathrm{f}(p-1)=\mathrm{C}+$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}p-1}\int_0^\infty\frac{dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z}+e^{-\frac{1}{2}\pi z}}\cdot\frac{\mathrm{f}(p+z\sqrt{-1})+\mathrm{f}(p-z\sqrt{-1})}{2},$$

$$= C + (-1)^{\frac{1}{2}p-1}\,\tfrac{1}{2}\left\{B_0 f(p) - \frac{B_2}{1\cdot 2} f''(p) + \frac{B_4}{1\ldots 4} f'''(p) - \text{etc.} + \frac{(-1)^n B_{2n}}{1\ldots 2n} f^{(2n)}(p) + \frac{(-1)^{n+1} B_{2n+2}}{1\ldots(2n+2)} \cdot \varepsilon M_{2n+2}\right\}. \qquad \text{(VIII)}$$

Les seconds membres de ces huit formules constituent des séries qui convergent jusqu'à un certain terme, à partir duquel elles commencent à diverger de plus en plus ; il ne faut donc continuer le calcul de ces membres que jusqu'au terme où la divergence commence, c'est-à-dire jusqu'au rang pour lequel le reste de chacun de ces membres, acquiert sa valeur minimum.

FIN DU DEUXIÈME LIVRE.

# III[me] LIVRE.

—

# EXPRESSION DES FONCTIONS ARBITRAIRES

PAR

# DES INTÉGRALES MULTIPLES,

## ET DES SÉRIES A QUANTITÉS PÉRIODIQUES.

Dans ce livre il s'agit de la conversion des fonctions arbitraires, non spécialisées, en séries convergentes composées d'une infinité de termes dont les valeurs se reproduisent périodiquement, et en intégrales multiples, présentées sous une forme finie. Nous le partagerons en plusieurs Sections; dans la 1[re] nous établirons les principes fondamentaux de la théorie; dans la 2[me], les séries périodiques de Fourier et de Lagrange; dans la 3[me] les intégrales de Fourier, dans la 4[me] les séries périodiques et des intégrales dûes à l'irrationnelle $\frac{1}{\sqrt{1-2p\alpha+\alpha^2}}$.

## I[re] SECTION.

### PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE.

#### THÉORÈME FONDAMENTAL.

k *étant un nombre positif*, 1° *si* f(t) *est une fonction qui demeure finie, pour toutes les valeurs de* t, *depuis* $t=a$ *jusqu'à* $t=b$, *on aura :*

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}=0\,,\ \textit{pour}\ k=\infty\,.$$

2° *Si la fonction* f(t) *devient infinie ou indéterminée, pour une valeur* $t=\alpha$, *non située en-dehors de l'intervalle des limites* a et b,

*on aura encore* (1) $\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} = 0$, *pour* $k = 0$,

*pourvu que la condition*

$$(2) \quad da \cdot f(\alpha \pm da) = 0 ,$$

*soit remplie.*

*Démonstration.* Il y a plusieurs cas à distinguer, savoir :

1° La fonction $f(t)$ reste finie et continue entre $a$ et $b$;

2° Elle devient une ou plusieurs fois discontinue entre $a$ et $b$;

3° Elle devient infinie à la limite inférieure $t = a$;

4° Elle devient infinie à la limite supérieure $t = b$;

5° Elle devient infinie pour $t = \alpha$, $\alpha$ étant compris entre $a$ et $b$.

1er Cas.

On a, par la form. (15) du 1er liv. :

$$\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} dt = da\left[ f(a) e^{-ka\sqrt{-1}} + f(a+da)\, e^{-k(a+da)\sqrt{-1}} + \ldots + f(a+\overline{n-1}\, da) e^{-k(a+\overline{n-1}\, da)} \right],$$

$$= e^{-ka\sqrt{-1}} da\left[ f(a) + f(a+da)\, e^{-kda\sqrt{-1}} + \ldots + f(a+\overline{n-1}\, da) e^{-k(n-1)da\sqrt{-1}} \right].$$

Comme la fonction $f(t)$ est continue par hypothèse, depuis $t=a$ jusqu'à $t=b$, aucune des expressions $f(a), f(a+da), \ldots f(a+\overline{n-1}\, da)$, ne deviendra infinie ou indéterminée dans cet intervalle ; de plus, comme on a, à cause de $k$ positif,

$$e^{-ka\sqrt{-1}} = 0 , \text{ pour } k = \infty ,$$

il vient, pour cette valeur de $k$ :

$$\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0.$$

2me Cas.

Supposons que la fonction $f(t)$ devienne indéterminée pour $t = \alpha$, $a < \alpha < b$ ; dans ce cas, l'équation

$$y = f(t) ,$$

représente une courbe composée de deux arcs de courbes diverses,

le 1[er] de ces arcs aura pour ordonnée finale $f(\alpha)$, et le 2[d] pour ordonnée initiale $f(\alpha)$. Si donc ces arcs appartiennent à des courbes différentes, caractérisées par les équations

$$y=\varphi(t)\,,\ y=\chi(t)\,,$$

l'on voit que l'expression $f(\alpha)$, a la valeur double $\varphi(\alpha)$, et $\chi(\alpha)$, et par conséquent $f(\alpha)$ est indéterminée. Mais comme, par hypothèse, $f(t)$ ne devient indéterminée que pour $t=\alpha$, il est clair que la fonction $\varphi(t)$, sera continue depuis $t=a$, jusqu'à $t=\alpha-da$; et que la fonction $\chi(t)$ le sera à partir de $t=\alpha+da$, jusqu'à $t=b$. Mais on a :

$$\int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt=\int_a^{\alpha-da} f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt+\int_{\alpha+da}^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt\,,$$

$$=\int_a^{\alpha-da} \varphi(t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt+\int_{\alpha+da}^b \chi(t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt.$$

Mais comme chacune des intégrales du 2[d] membre se trouve dans la condition exigée par le 1[er] cas, leurs valeurs seront nulles, et l'on aura :

$$\int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}=0,\quad \text{pour}\ k=\infty\,.$$

### 3[me] Cas.

Si l'on suppose que la fonction $f(t)$ devient infinie pour $t=a$, alors, à cause de $f(a)=\infty$, l'expression

$$\int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt=e^{-ka\sqrt{-1}}da\,[\,f(a)+ f(a+da)e^{-kda\sqrt{-1}}+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,da)e^{-k\,\overline{n-1}\,da\sqrt{-1}}\,]\,,$$

devient en général indéterminée, ou de la forme,

$$\int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt=0\times\infty\,.$$

Cependant, si pour la même valeur de $a$, le produit $da\,f(a+da)$, dans lequel il faudra remplacer $da$ par zéro, après le développement, se réduit à zéro, on aura :

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt = 0 \times 0 = 0.$$

*Remarque.* Cette conclusion subsiste encore si la limite inférieure $a$ est zéro. Car alors on a :

$$\int_0^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt = da\,[\,f(0) + f(da)\,e^{-kda\sqrt{-1}} + \ldots + f(\overline{n-1}\,da)\cdot e^{-(n-1)kda\sqrt{-1}}\,],$$

$$= da\,f(0) + [\,e^{-k\sqrt{-1}}\,]^{da}\,[\,da\,f(da) + \ldots + da\,f(\,n-1\,da)\cdot e^{-(n-2)kda\sqrt{-1}}\,].$$

Comme $f(0)=\infty$, par hypothèse, il suit que l'expression $da \times f(0)$, ou $da\,f(da)$, en remplaçant dans son développement $da$ par zéro, se présente, en général, sous la forme $0 \times \infty = \frac{0}{0}$; par conséquent le 2[d] membre de la formule précédente est indéterminé. Cependant cette indétermination cesserait dans le cas où, après avoir remplacé, le développement après $da$ par zéro, le produit $da\,f\,(da)$ s'évanouirait. En effet, $da\,f\,(0)=0$, et de plus, le facteur $[\,e^{-k\sqrt{-1}}\,]^{da}$ sera nul, à cause de $e^{-k\sqrt{-1}}=0$, pour $k=\infty$.

Il est manifeste que la même conclusion subsistera encore pour $b=\infty$ ; en effet, alors le facteur de $[\,e^{-k\sqrt{-1}}\,]^{da}$, dans la formule précédente, se composera d'une infinité de termes dont aucun ne devient infini.

Supposons que $f(b)=\infty$ ; dans ce cas, comme on a :

$$a + nda = b,\quad a + \overline{n-1}\,da = b - da,$$

on pourra écrire :

$$(\alpha)\quad \int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt = e^{-ka\sqrt{-1}}da\,[\,f(a) + f(a+da)e^{-kda\sqrt{-1}} + \ldots + f(b-da)\,e^{-\overline{n-1}\,k\sqrt{-1}}\,].$$

Par conséquent si le produit

$$da\,f\,(b-da),$$

dans lequel on remplace $da$ par zéro après le développement, est lui-même zéro, on aura :

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt = 0.$$

Cette conclusion subsiste pour $b=\infty$, car alors le facteur de $e^{-ka\sqrt{-1}}$ au 2[d] membre de ($\alpha$), se compose d'une infinité de termes dont aucun n'est infini.

5[me] Cas.

Si $f(t)$ devient infini pour $t=\alpha$, valeur comprise entre $a$ et $b$, on pourra écrire :

$$(\beta) \quad \int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}dt = \int_a^\alpha f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}dt + \int_\alpha^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}dt.$$

Mais, en vertu du 4[me] cas, l'expression $\int_a^\alpha f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}dt$ est nulle, si la condition $da\, f(\alpha - da) = 0$, est remplie ; et en vertu du 3[me] cas, l'autre intégrale $\int_\alpha^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}dt$ sera nulle, pourvu que la condition $da\, f(\alpha + da) = 0$, soit satisfaite. On aura donc dans le cas actuel :

$$\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} = 0,$$

si l'on a, en même temps :

$$da\, f(\alpha + da) = 0,$$
$$da\, f(\alpha - da) = 0.$$

Cette formule serait encore vraie dans le cas où l'on aurait $a=0$, $b=\infty$ ; car, à cause des remarques faites dans le 3[e] et le 4[e] cas, les deux termes du 2[d] membre de ($\beta$), se réduiront l'un et l'autre à zéro ; donc :

$$\int_0^\infty f(t) e^{-kt\sqrt{-1}} = 0. \qquad (5)$$

*Remarque.* Si l'on supposait $a=-\infty$, $b=\infty$, il viendrait encore $\int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-kt} dt = 0$, pour $k=\infty$, pourvu que l'on ait, en même temps,

$$da\, f(\alpha + da) = 0.$$

En effet, si dans la formule de Cauchy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=\Delta,$$

$$\Delta=2\pi\sqrt{-1}\cdot\theta,$$

$$\theta=dc\cdot\varphi[c+dc+e\sqrt{-1}],$$

$$\varphi(t)=\infty,\ \text{pour}\ t=c+e\sqrt{-1},$$

on fait $\varphi(t)=\mathrm{f}(t)e^{-\mathrm{k}\mathrm{t}\sqrt{-1}}=\infty$; d'où $\mathrm{f}(t)=\infty$, $t=\alpha$, il vient :

$$\theta=da\,\mathrm{f}(\alpha+da),\quad \Delta=2\pi\sqrt{-1}\cdot da\,\mathrm{f}(\alpha+da).$$

Donc, pour $da\,\mathrm{f}(\alpha+da)=0$, on a $\Delta=0$, et par suite

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(t)e^{-\mathrm{kt}\sqrt{-1}}=0. \qquad (4)$$

PROBLEME FONDAMENTAL.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^c\frac{\mathrm{F(t)}}{\mathrm{t}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{kt}\sqrt{-1}} \quad \textit{pour}\ \mathrm{k}=\infty\ ;$$

*on suppose que* F(t) *conserve une valeur unique et finie, pour toutes les valeurs de* t, *depuis* t = 0, *jusqu'à* t = c.

*Solution.* Si dans la form. $\int_0^c e^{-\mathrm{kt}\sqrt{-1}}\mathrm{f}(t)dt=0$, pour $k=\infty$,

on fait $\mathrm{f}(t)=\dfrac{\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(0)}{t}$, on aura :

$$(5)\qquad \int_0^c\frac{\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(0)}{t}\cdot e^{-\mathrm{kt}\sqrt{-1}}dt=0,\ \text{pour}\ k=\infty.$$

Cependant il convient de prévenir ici une objection. On a, en effet :

$$\int_0^c\frac{\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(0)}{t}\,e^{-\mathrm{kt}\sqrt{-1}}=dc\,e^{-\mathrm{kc}\sqrt{-1}}\Big[\frac{\mathrm{F}(0)-\mathrm{F}(0)}{0}+$$

$$\frac{\mathrm{F}(dc)-\mathrm{F}(0)}{dc}\,e^{-\mathrm{kdc}\sqrt{-1}}+\text{etc.}\Big]$$

$$=dc\cdot\tfrac{0}{0},\ \text{pour}\ k=\infty.$$

D'après cela, l'intégrale dont nous cherchons la valeur, serait indéterminée. Néanmoins, il n'en est pas ainsi. En effet, la vraie valeur de $\frac{F(t)-F(0)}{t}$, qui devient $\frac{0}{0}$, pour $t=0$, est une quantité finie, $y$ compris zéro, ou une quantité infinie. Dans le 1$^{er}$ cas, on a évidemment $dc \cdot \frac{0}{0}=0$, et dans le 2$^{d}$, on aurait encore $dc \cdot \frac{0}{0}=0$, si, d'après la remarque du 3$^{e}$ cas du théorème fondamental, l'expression $dc \cdot f(\alpha+dc)=dc\, f(dc)$ était nul pour $dc=0$. Or, on a :

$$f(dc)=\frac{F(dc)-F(0)}{dc};$$

donc, $\qquad dc\, f(dc)=F(dc)-F(0)=F(0)-F(0)=0$;

l'on voit donc que la relation (5) subsiste effectivement.

Cela posé, de la relation (5), on tire, en transposant :

$$\int_0^c \frac{F(t)e^{-kt\sqrt{-1}}}{t}\,dt=F(0)\int_0^c \frac{e^{-kt\sqrt{-1}}}{t}. \qquad (6)$$

Posons, dans le 2$^{d}$ membre de (6), $kt=z$; alors les limites $t=\left\{\begin{matrix}c\\0\end{matrix}\right.$, deviennent $z=\left\{\begin{matrix}kc\\0\end{matrix}\right.$; ou, pour $k=\infty$, elles deviennent $z=\left\{\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix}\right.$; on a donc, pour cette valeur de $k$ :

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt=F(0)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z}, \quad k=\infty. \qquad (7)$$

1. *Corollaire.* De l'équation (7) on tire :

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t}\cos kt\,dt=F(0)\int_0^\infty \frac{\cos z dz}{z},$$

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t}\sin kt\,dt=F(0)\int_0^\infty \frac{\sin z dz}{z}.$$

Donc, en multipliant la dernière par $\sqrt{-1}$, on trouve, en ajoutant :

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t}\,e^{kt\sqrt{-1}}dt=F(0)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}dz}{z}, \quad k=\infty. \qquad (8)$$

2. *Corollaire.* En différentiant l'expression $\int_0^c \frac{F(t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt$ par rapport à $k$, on a : $d \cdot e^{-kt\sqrt{-1}} = -t\sqrt{-1}\, e^{-kt\sqrt{-1}} dk$ ; d'où :

$$\frac{e^{-kt\sqrt{-1}}}{t} = -\sqrt{-1}\int_0^k e^{-kt\sqrt{-1}} dk = -\sqrt{-1}\int_0^k e^{-ut\sqrt{-1}} du.$$

Donc, en multipliant par $F(t)dt$, et en intégrant entre 0 et $c$, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{F(t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt}{t} = -\sqrt{-1}\int_0^c F(t)dt \int_0^k e^{-ut\sqrt{-1}} du,$$

$$= -\sqrt{-1}\int_0^k du \int_0^c F(t)e^{-ut\sqrt{-1}} dt.$$

On a donc, pour $k = \infty$, en ayant égard à (8) :

$$F(0)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z} = -\sqrt{-1}\int_0^\infty du \int_0^c F(t)e^{-ut\sqrt{-1}} dt. \qquad (9)$$

Si dans celle-ci on change $F(t)$ en $\varphi(x+t)$, on aura :

$$\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z} = -\sqrt{-1}\int_0^\infty du \int_0^c \varphi(x+t)e^{-ut\sqrt{-1}} dt. \quad (10)$$

3. *Corollaire.* Si dans la form. (7) on change, tour à tour, $F(t)$ en $\varphi(x+t)$ et $\varphi(x-t)$, on aura, à sa place, les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \int_0^c \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt &= \varphi(x+0)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z}, \quad k=\infty \\ \int_0^c \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt &= \varphi(x-0)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z}, \quad k=\infty \end{aligned}\right\} (7')$$

On trouvera de même, à la place de la form. (8), les deux formules que voici :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^c \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{kt\sqrt{-1}}dt &= \varphi(x+0)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}dz}{z}. \\ \int_0^c \frac{\varphi(x-t)}{t}\, e^{kt\sqrt{-1}}dt &= \varphi(x-0)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}dz}{z}.\end{aligned}\right\} \quad (8')$$

1. *Remarque.* En admettant que la fonction $\varphi(x)$ soit continue, au point $x=x$, on aura :

$$\varphi(x+dx)=\varphi(x-dx), \quad \text{ou} \quad \varphi(x+0)=\varphi(x-0).$$

Mais si $\varphi(x)$ est discontinue, on n'aura plus $\varphi(x+dx)=\varphi(x-dx)$, pour $dx=0$, puisque les deux membres de cette équation désignent des ordonnées de courbes différentes; dans ce cas les expressions $\varphi(x+0)(x+0)$ et $\varphi(x-0)$ ne seront point identiques.

2. *Remarque.* Nous allons déduire du théorème et du problème fondamental, les conséquences immédiates sous forme de problèmes particuliers.

### 1er Problème.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_a^b \mathrm{f}(t)\sin ktdt, \int_a^b \mathrm{f}(t)\cos ktdt,$$

*dans l'hypothèse de* $\mathrm{k}=\infty$.

*Solution.* En développant $e^{-kt\sqrt{-1}}$, la formule du théorème fondamental devient :

$$\int_a^b \mathrm{f}(t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt=\int_a^b \mathrm{f}(t)\cos ktdt-\sqrt{-1}\int_a^b \mathrm{f}(t)\sin ktdt=0$$

pour $k=\infty$, et $\mathrm{f}(t)$ continu entre $a$ et $b$. On a donc, dans les mêmes hypothèses de $k$ et de $\mathrm{f}(t)$, les formules :

$$(11) \quad \int_a^b \mathrm{f}(t)\cos ktdt=0, \quad \int_a^b \mathrm{f}(t)\sin ktdt=0. \quad (12)$$

Si $\mathrm{f}(t)$ devenait infini pour $t=\alpha$, valeur comprise entre $a$ et $b$, les form. (11) et (12) subsisteraient encore, pourvu que la condition $d\alpha\,\mathrm{f}(\alpha\pm d\alpha)=0$, soit remplie, en fesant, comme toujours, $d\alpha=0$, après le développement.

## 2^me Problème.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \sin ktdt, \quad \int_0^c \frac{F(t)}{t} \cos ktdt,$$

*pour* $k = \infty$.

*Solution.* Si $\frac{F(t)}{t}$ a une valeur finie et unique dans l'intervalle de $t = 0$, à $t = c$, on a, par la form. (7) :

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = F(0) \int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}} dz}{z}, \quad k = \infty.$$

On a donc aussi, sous les mêmes conditions :

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \cos ktdt - \sqrt{-1} \int_0^c \frac{F(t)}{t} \sin ktdt =$$

$$F(0) \int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z} - \sqrt{-1}\, F(0) \int_0^\infty \frac{\sin zdz}{z}.$$

On tire de celle-ci :

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \cos ktdt = F(0) \int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z}, \qquad (13)$$

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \sin ktdt = F(0) \int_0^\infty \frac{\sin zdz}{z}. \qquad (14)$$

Mais on a : $\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z} = \infty, \int_0^\infty \frac{\sin zdz}{z} = \frac{\pi}{2}$,

il vient donc : $\int_0^c \frac{F(t)}{t} \cos ktdt = \infty, \quad k = \infty, \qquad (15)$

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \sin ktdt = F(0) \cdot \frac{\pi}{2}. \qquad (16)$$

*Corollaire.* En développant les exponentielles de la form. (10)

$$\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z} = -\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_0^c \varphi(x+t)\,e^{-ut\sqrt{-1}}dt\,,$$

on trouve :

$$\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z} - \varphi(x)\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{\sin zdz}{z} =$$

$$-\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_0^c \varphi(x+t)\cos utdt - \int_0^\infty du\int_0^c \varphi(x+t)\sin utdt.$$

Par la comparaison des termes réels et des coëfficients de $\sqrt{-1}$, cette relation se partage en deux :

$$\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z} = -\int_0^\infty du\int_0^c \varphi(x+t)\sin utdt\,, \qquad (17)$$

$$\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\sin zdz}{z} = \int_0^\infty du\int_0^c \varphi(x+t)\cos utdt. \qquad (18)$$

De cette dernière, à cause de $\int_0^\infty \frac{\sin zdz}{z} = \frac{\pi}{2}$, on tire :

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\int_0^c \varphi(x+t)\cos utdt. \qquad (19)$$

### 3me Problème.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^c f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt\,,\quad \int_0^c f(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt\,,$$

*pour* $k = \infty$.

1°

*Solution.* Cherchons la valeur de la 1re de ces intégrales ; à cet effet nous distinguerons plusieurs cas, savoir :
$c<\pi$, $c=\pi$, $c=m\pi$, $c=m\pi+r$, $r<\pi$, $m$ entier et positif.

1^er^ CAS. $c < \pi$.

Si dans la form. (16)

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \sin kt dt = \frac{\pi}{2} F(0)\ ,\ k = \infty\ ,$$

dans laquelle $F(t)$ doit avoir une valeur finie unique de $t = 0$ à $t = c$, on pose :

$$F(t) = \frac{t}{\sin t} f(t)\ ,$$

cette substitution sera permise, si entre les mêmes limites de $t$, la nouvelle fonction $f(t)$ conserve une valeur finie unique, car alors, à cause de $c < \pi$, le facteur $\frac{t}{\sin t}$, restera également fini, et n'aura qu'une seule valeur entre ces mêmes limites; on aura donc :

$$\int_0^c \frac{t}{\sin t}\, f(t)\, \frac{\sin kt}{t} dt = \frac{\pi}{2} F(0).$$

Mais on a : $F(da) = \frac{da}{\sin da} f(da) = \frac{da}{da} f(da) = f(da)$ ; donc $F(0) = f(0)$, par suite :

$$\int_0^c f(t)\, \frac{\sin kt}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2} f(0). \qquad (20)$$

2^me^ CAS. $c = \pi$.

On a ici :

$$\int_0^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t) dt.$$

Fesons dans la dernière intégrale à droite $t = \pi - t'$, il viendra :

$$\int_0^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f(\pi - t') dt'.$$

Or, puisqu'on a ici $c = \frac{1}{2}\pi < \pi$, on pourra appliquer, aux deux intégrales du 2^d^ membre, la formule (20), ce qui nous donnera :

$$\int_0^\pi f(t) \frac{\sin kt}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2} f(0) + \frac{\pi}{2} f(\pi)\ ,\quad k = \infty\ . \qquad (21)$$

3$^{me}$ CAS. $c = m\pi$.

On a d'abord :

$$\int_0^{m\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt = \int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt + \ldots + \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt. \quad (\alpha)$$

Mais si dans la dernière intégrale à droite, on pose $t=(m-1)\pi+t'$, alors à la place des limites $t=\left\{\begin{matrix} m\pi \\ (m-1)\pi \end{matrix}\right.$, on aura $t'=\left\{\begin{matrix} \pi \\ 0 \end{matrix}\right.$, par suite :

$$\int_{(m-1)\pi}^{m\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt = \int_0^{\pi} f[(m-1)\pi+t']\frac{\sin k[(m-1)\pi+t']}{\sin[(m-1)\pi+t']}dt'. \quad (\beta)$$

Or, en supposant $k$ impair, le 2[d] membre de la formule précédente se réduit, et l'on aura :

$$\int_{(m-1)\pi}^{m\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt = \int_0^{\pi} f[(m-1)\pi+t']\frac{\sin kt'}{\sin t'}dt',$$

$$= \frac{\pi}{2}f[(m-1)\pi] + \frac{\pi}{2}f(m\pi), \text{ à cause de } (21).$$

Fesons, dans cette dernière, $m$ successivement égal à

$$1, 2, \ldots m,$$

on en déduit :

$$\int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt = \frac{\pi}{2}f(0) + \frac{\pi}{2}f(\pi),$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt = \frac{\pi}{2}f(\pi) + \frac{\pi}{2}f(2\pi),$$

etc. etc.

$$\int_{(m-1)\pi}^{m\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt = \frac{\pi}{2}f[(m-1)\pi] + \frac{\pi}{2}f(m\pi);$$

En substituant ces valeurs dans la form. $(\alpha)$, il vient :

$$\int_0^{m\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt = \pi\left[\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\ldots+\tfrac{1}{2}f(m\pi)\right],\ k=\infty. \quad (22)$$

4$^{me}$ Cas. $c = m\pi + r,\ r < \pi$.

On a d'abord

$$\int_0^{m\pi+r} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}\,dt = \int_0^{m\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}\,dt + \int_{m\pi}^{m\pi+r} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}\,dt. \qquad (\alpha)$$

Mais si, dans la dernière intégrale à droite, on pose $t = m\pi + t'$, les limites $t = \left\{\begin{matrix} m\pi+r \\ m\pi \end{matrix}\right.$, se changeront en $t' = \left\{\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix}\right.$, et il viendra :

$$\int_{m\pi}^{m\pi+r} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}\,dt = \int_0^{r} f(m\pi + t')\frac{\sin kt'}{\sin t'}\,dt' = \frac{\pi}{2}\cdot f(m\pi).$$

En substituant cette valeur, ainsi que celle donnée par (22), à la place des deux intégrales du 2$^d$ membre de ($\alpha$), on aura :

$$\int_0^{m\pi+r} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}\,dt = \pi\left[\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f(m\pi)\right],\quad k = \infty. \qquad (23)$$

*Corollaire.* Si $m$ est infini, on a :

$$\int_0^{\infty} f(t)\frac{\sin kt}{\sin t}\,dt = \pi\left[\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \text{etc.}\right],\quad k = \infty. \qquad (24)$$

2°

Cherchons la valeur de la 2$^{me}$ des deux intégrales demandées. A cet effet, il y aura encore 4 cas à examiner, savoir :

$$c < \frac{\pi}{2},\quad c = \frac{\pi}{2},\quad c = (m + \tfrac{1}{2})\pi,\quad c = (m + \tfrac{1}{2})\pi + r.$$

1$^{er}$ Cas. $c < \dfrac{\pi}{2}$.

Si $f(t)$ conserve une valeur finie et unique depuis $t = a$, jusqu'à $t = b$, on aura, d'après la form. (11),

$$\int_a^b f(t)\cos kt\,dt = 0,\quad k = \infty.$$

Fesons ici $f(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\cos t}$; $f(t)$ restera fini, et aura constamment une valeur unique, pourvu que la fonction $\varphi(t)$ jouisse de ces mêmes propriétés, et que l'on ait, en outre,

$t < \frac{\pi}{2}$. Donc, pour $a=0$, $c < \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_0^c \varphi(t) \frac{\cos kt}{\cos t} dt = 0\,, \quad k=\infty\;;$$

ou, en remettant f à la place de $\varphi$,

$$\int_0^c \mathrm{f}(t) \frac{\cos kt}{\cos t} dt = 0\,, \quad k=\infty\,. \qquad (25)$$

2^me^ Cas. $c = \frac{\pi}{2}$.

Si dans l'expression $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f}(t) \frac{\cos kt}{\cos t} dt$, on fait $t = \frac{\pi}{2} - t'$, on aura, à la place des limites $t = \left\{ \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{matrix} \right.$, les suivantes $t' = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right.$ ; soit de plus $k$ de la forme $4n+1$, il vient : $kt = (4n+1)\frac{\pi}{2} - kt$, donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f}(t) \frac{\cos kt}{\cos t} dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin kt'}{\sin t'} \mathrm{f}\left(\frac{\pi}{2} - t'\right) dt' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f}\left(\frac{\pi}{2} - t'\right) \frac{\sin kt'}{\sin t'} dt'\;;$$

Donc, à cause de la formule (20), qui est applicable à la dernière intégrale à droite, il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f}(t) \frac{\cos kt}{\cos t} dt = \frac{\pi}{2} \mathrm{f}\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (26)$$

3^me^ Cas. $c = (m+\frac{1}{2})\pi$.

On a d'abord :

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi} \mathrm{f}(t) \frac{\cos kt}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f}(t) \frac{\cos kt}{\cos t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{(m+\frac{1}{2})\pi} \mathrm{f}(t) \frac{\cos kt}{\cos t} dt. \qquad (\alpha)$$

Fesons $t=\frac{\pi}{2}+t'$, on aura $t'=\left\{\begin{matrix} m\pi \\ \\ 0\end{matrix}\right.$, à la place de $t=\left\{\begin{matrix} (m+\frac{1}{2})\pi \\ \\ \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right.$;

$\cos t=-\sin t'$; et en posant de plus $k=4n+1$, on aura :

$$\cos kt=\cos(4n+1)(t'+\frac{\pi}{2})=-\sin kt';$$

par conséquent $(\alpha)$ devient :

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt+\int_0^{m\pi}\frac{\sin kt'}{\sin t'}\mathrm{f}(\frac{\pi}{2}+t')dt';$$

donc, à cause des form. (26), (22), on a :

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt=\pi\left[\mathrm{f}(\frac{\pi}{2})+\mathrm{f}(\frac{3\pi}{2})+\ldots+\tfrac{1}{2}\mathrm{f}[\frac{(2m+1)\pi}{2}]\right], k=\infty. \quad (27)$$

4me Cas. $c=(m+\frac{1}{2})\pi+r$, $r<\pi$.

On a ici :

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi+r} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt=\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt+\int_{(m+\frac{1}{2})\pi}^{(m+\frac{1}{2})\pi+r} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt. \quad (\alpha)$$

Pour $t=(m+\frac{1}{2})\pi+t'$, $k=4n+1$, on a :

$$t'=\left\{\begin{matrix} r \\ \\ 0\end{matrix}\right., \text{ à la place de } t=\left\{\begin{matrix} (m+\frac{1}{2})\pi+r \\ \\ (m+\frac{1}{2})\pi\end{matrix}\right.;$$

$\cos kt=(-1)^m\sin kt'$, $\cos t=(-1)^m\sin t'$. Par là, $(\alpha)$ devient :

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi+r} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt=\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt+\int_0^{r}\frac{\sin kt'}{\sin t'}\mathrm{f}[(m+\tfrac{1}{2})\pi+t']dt'.$$

Donc, à cause des form. (20) et (27),

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi+r} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt=\pi\left[\mathrm{f}(\frac{\pi}{2})+\mathrm{f}(\frac{3\pi}{2})+\ldots+\mathrm{f}[\frac{(2m+1)\pi}{2}]\right], k=\infty. \quad (28)$$

*Corollaire.* Si $m=\infty$, cette dernière devient :

$$\int_0^{\infty} \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\cos t}dt=\pi\,[\,\mathrm{f}(\frac{\pi}{2})+\mathrm{f}(\frac{3\pi}{2})+\ldots \text{ à l'infini }], \; k=\infty. \quad (29)$$

### 4$^{me}$ Problème.

*c étant plus petit que $\pi$, chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^c \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\sin t}\,dt\,,\quad \int_0^c \mathrm{f}(t)\frac{\sin kt}{\cos t}\,dt.$$

*pour* $k=\infty$ .

*Solution.* 1° Si $\varphi(t)$ conserve une valeur finie et unique, tandis que $t$ prend successivement toutes les valeurs de $t=0$ à $t=c$, on a

$$\int_0^c \varphi(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt=0\,,\ \text{pour}\ k=\infty\,,$$

d'où l'on tire aussi :

$$\int_0^c \varphi(t)\cos kt\,dt=0\,,\ \text{pour}\ k=\infty\,.$$

Soit $\varphi(t)=\dfrac{\mathrm{f}(t)}{\sin t}$; donc tant qu'on aura $t<\pi$, $t>0$, la fonction $\varphi(t)$ ne deviendra ni infinie ni indéterminée pour aucune des valeurs de $t$ comprises entre 0 et $c$, pourvu que $\mathrm{f}(t)$ conserve aussi entre ces limites constamment une valeur finie et unique, on aura par conséquent :

$$\int_0^c \mathrm{f}(t)\frac{\cos kt}{\sin t}\,dt=0\,,\ c<\pi,\ k=\infty\,. \qquad (30)$$

2° On a aussi, pour le cas où $\varphi(x)$ est continu entre 0 et $c$,

$$\int_0^c \varphi(t)\sin kt\,dt=0\,,\ \text{pour}\ k=\infty\,.$$

Soit $\varphi(t)=\dfrac{\mathrm{f}(t)}{\cos t}$; tant qu'on aura $t<\frac{1}{2}\pi$, la fonction $\varphi(t)$ restera finie et continue, pourvu que $\mathrm{f}(t)$ reste fini et continu de zéro à $\dfrac{\pi}{2}$; on a donc

$$\int_0^c \mathrm{f}(t)\frac{\sin kt}{\cos t}\,dt=0\,,\ \text{pour}\ c<\frac{\pi}{2},\ k=\infty\,. \qquad (30')$$

*Remarque.* Presque toutes les formules de cette section sont dues à Lejeune-Dirichlet. (Voyez *Journal de Crelle*, vol. 4, p. 157).

*Applications des Formules de la 1[re] Section.*

### 1[er] Exemple.

*Chercher la valeur des expressions*

$$\int_0^\pi \frac{\cos kx}{\cos x} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \cos x dx ,$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \operatorname{tg} x \sin x dx ,$$

*pour* $k=\infty$ .

*Solution.* 1° On a, par la form. (21),

$$\int_0^\pi f(x) \frac{\sin kx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} f(0) + \frac{\pi}{2} f(\pi).$$

Or, en posant $f(x)=\frac{(1-r^2)\operatorname{tg} x \sin x}{1-2r\cos x+r^2}$, il vient $f(0)=0$, $f(\pi)=0$, donc

$$(30'') \quad \int_0^\pi \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \operatorname{tg} x \sin x dx = 0 \text{, pour } k=\infty .$$

2° On a, par la form. (28) :

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi+r} f(x) \frac{\cos kx}{\sin x} dx = \pi\left[ f(\frac{\pi}{2}) + .. + f\left[\frac{(2m+1)\pi}{2}\right]\right], \quad r<\pi.$$

Donc, pour $m=0$, $r=\frac{1}{2}\pi$, il vient :

$$\int_0^\pi f(x) \frac{\cos kx}{\sin x} dx = \pi \cdot f(\frac{\pi}{2}).$$

Or, pour $f(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\cos x$, on a $f(\frac{\pi}{2})=0$; d'où :

$$(30''') \quad \int_0^\pi \frac{\cos kx}{\cos x} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \cos x dx = 0 \text{, pour } k=\infty .$$

2^me^ EXEMPLE.

*Chercher les valeurs des expressions*

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{\sin x} \cdot \frac{2x \cot x}{a^2+4x^2} dx, \int_0^\infty \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{a^2+x^2} \sin x dx ,$$

*pour* $k=\infty$.

*Solution.* 1° La form. (29) donne :

$$\int_0^\infty f(x) \frac{\cos kx}{\cos x} dx = \pi [ f(\frac{\pi}{2}) + f(\frac{3\pi}{2}) + \text{etc.} ] ;$$

donc, pour $f(x) = \frac{2x \cot x}{a^2+4x^2}$, on a $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = \text{etc.} = 0$,

puisque $\cot(\frac{\pi}{2}) = \cot(\frac{3\pi}{2}) = \text{etc.} = 0$; donc

$$(30^{IV}) \quad \int_0^\infty \frac{\cos kx}{\cos x} \cdot \frac{2x \cot x}{a^2+4x^2} dx = 0.$$

2° On a par la form. (24) :

$$\int_0^\infty f(x) \frac{\sin kx}{\sin x} dx = \pi [ \tfrac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \text{etc.} ].$$

Donc, pour $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x \sin x}{a^2+x^2}$, il vient :

$$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = \text{etc.} = 0, \quad \text{donc :}$$

$$(30\ ) \quad \int_0^\infty \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{a^2+x^2} \sin x dx = 0.$$

3^me^ EXEMPLE.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot \frac{2x \operatorname{tg} x}{a^2+4x^2} dx ,$$

*pour* $k = \infty$.

*Solution.* En posant $f(x) = \frac{2x \operatorname{tg} x}{a^2+4x^2}$, on trouve :

$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = \text{etc.} = 0$, donc, à cause de (24)

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot \frac{2x \operatorname{tg} x}{a^2 + 4x^2}\, dx = 0. \qquad (30^{\text{vi}})$$

## 2$^{\text{me}}$ SECTION.

## SÉRIES PÉRIODIQUES DE FOURIER ET DE LAGRANGE.

Ces séries donnent les développements d'une fonction arbitraire en suites convergentes procédant suivant les sinus et les cosinus des arcs multiples ; les coëfficients de ces suites étant donnés par des intégrales définies.

### Lemme.

Je dis que l'on a :

$$\tfrac{1}{2} + e^{(x-t)\sqrt{-1}} + e^{2(x-t)\sqrt{-1}} + \ldots + e^{n(x-t)\sqrt{-1}} =$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\cot\frac{x-t}{2} - \frac{\cos(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]. \qquad (31)$$

*Démonstration.* On a :

$$\tfrac{1}{2} + e^{(x-t)\sqrt{-1}} + \text{etc.} + e^{n(x-t)\sqrt{-1}}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \cos(x-t) + \cos 2(x-t) + \ldots + \cos n(x-t) +$$

$$\sqrt{-1}\,[\sin(x-t) + \sin 2(x-t) + \ldots + \sin n(x-t)],$$

$$= \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{2\sin\frac{x-t}{2}} + \sqrt{-1}\,\frac{\sin\frac{n(x-t)}{2}\sin(n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}.$$

Soit $p+q = (n+1)(x-t)$, $p-q = n(x-t)$, d'où

$p = (2n+1)\dfrac{(x-t)}{2}$, $q = \dfrac{x-t}{2}$, on aura :

$$\frac{\sin\frac{n(x-t)}{2}\sin(n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}} = \tfrac{1}{2}\frac{\cos\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}} - \tfrac{1}{2}\frac{\cos(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\cot\frac{x-t}{2}-\tfrac{1}{2}\frac{\cos(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}};\quad \text{donc, etc.}$$

### 1^er^ Problème.

*Chercher la somme finie de chacune des suites infinies*

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt+\int_0^\pi e^{(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\int_0^\pi e^{2(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\text{etc.}\qquad(32)$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt+\int_0^\pi e^{(t+x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\int_0^\pi e^{2(t+x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\text{etc.}\qquad(33)$$

*Solution.* Multiplions les deux membres de (31) par $f(t)dt$, on trouve, en intégrant :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt+\int_0^\pi e^{(x-t)\sqrt{-1}}f(t)dt+\ldots+\int_0^\pi e^{n(x-t)\sqrt{-1}}f(t)dt=$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}f(t)dt+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_0^\pi\frac{\cos(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}f(t)dt-\int_0^\pi\cot\frac{t-x}{2}f(t)dt\right].\qquad(34)$$

Soient $2n+1=k$, $\frac{t-x}{2}=u$, $t=2u+x$; on aura $u=\Big\{{}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}_{-\frac{1}{2}x}$, à la place de $t=\Big\{{}^{\pi}_{0}$, et par suite (34) devient :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt+\int_0^\pi e^{(x-t)\sqrt{-1}}f(t)dt+\ldots+\int_0^\pi e^{n(x-t)\sqrt{-1}}f(t)dt=$$

$$\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(2u+x)du+\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)du-\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot u\cdot f(2u+x)du\right].$$

Or en supposant $n$ infini, et par suite $k=\infty$, le 1er membre de cette égalité sera une suite infinie, qui aura pour somme la valeur du 2d membre correspondant à $k=\infty$. Déterminons cette valeur. A cet effet, fesons, pour abréger,

$$S=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt+\int_0^\pi e^{(x-t)\sqrt{-1}}f(t)dt + \text{etc., à l'infini}, \qquad (35)$$

on pourra écrire :

$$S=\int_{-\frac{1}{2}x}^{0}\frac{\sin ku}{\sin u}f(2u+x)du+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(2u+x)du+$$

$$\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}x}^{0}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)du+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)du-\right.$$

$$\left.\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot u\, f(2u+x)du\right]. \qquad (36)$$

Fesons, dans la 1re intégrale à droite, $u=-t$, dans la 2me $u=t$, dans la 3me $u=-t$, dans la 4me et la 5me $u=t$, on aura, à la place de (36),

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}x}\frac{\sin kt}{\sin t}f(x-2t)dt+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin kt}{\sin t}f(2t+x)dt+$$

$$\sqrt{-1}\left[-\int_0^{\frac{1}{2}x}\frac{\cos kt}{\sin t}f(x-2t)dt+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos kt}{\sin t}f(2t+x)dt-\right.$$

$$\left.\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)\, f(2t+x)dt\right]. \qquad (37)$$

Mais en supposant $0<x<\pi$, par suite $\frac{1}{2}x<\pi$, $\frac{1}{2}(\pi-x)<\pi$, on aura, en vertu des form. (20) et (30),

$$S=\pi\left[\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right]-\sqrt{-1}\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)\, f(2t+2x)dt. \qquad (38)$$

Or, si la fonction $f(x)$ est continue pour toutes le valeurs de $x$, de $x=0$, à $x=\pi$, on aura :

$$f(x+0)=f(x-0)=f(x),$$

par conséquent (38) devient :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)dt + \int_0^{\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^{\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc. à l'infini.}$$

$$= \pi f(x) + \sqrt{-1}\,[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)dt\, f(2t+x)]. \qquad \text{(I)}$$

En opérant d'une manière tout-à-fait semblable on trouvera :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)dt + \int_0^{\pi} e^{(t+x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_0^{\pi} e^{2(t+x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc. à l'inf.}$$

$$= \sqrt{-1}\,[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t) f(2t-x)dt]. \qquad \text{(II)}$$

En admettant que la fonction $f(x)$ soit nulle pour des valeurs négatives de $x$, on déduirait cette dernière formule immédiatement de la 1re, en remplaçant dans celle-ci $x$ par $-x$.

*Remarque.* Pour que les formules (I) et (II) subsistent, il faut que l'on ait $0 < x < \pi$.

Si l'on avait $x = 0$, les 1ers membres de ces deux formules seraient égaux, par conséquent en ajoutant, on obtient :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)dt + \int_0^{\pi} e^{t\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_0^{\pi} e^{2t\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc. à l'infini} =$$

$$\tfrac{1}{2}\pi f(0) + \sqrt{-1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cot(t)dt\, f(2t). \qquad (39)$$

Si l'on avait $x = \pi$, les premiers membres des formules (I) et (II), seraient encore égaux; par conséquent, en ajoutant on obtient :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)dt - \int_0^{\pi} e^{t\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_0^{\pi} e^{2t\sqrt{-1}} f(t)dt - \text{etc. à l'infini} =$$

$$\frac{\pi}{2} f(\pi) + \sqrt{-1}\,[\int_0^{\pi} \cot(t) f(2t-\pi)dt - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cot(t)[f(2t-\pi) + f(\pi-2t)]dt]. \qquad (40)$$

*Corollaire* 1. Développons les exponentielles des 1ers membres de (I) et (II) ; on a :

$$(\text{I}')\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt+\int_0^\pi \cos(t-x)\,f(t)dt+\int_0^\pi \cos 2(t-x)\,f(t)dt+\text{etc.}$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\int_0^\pi \sin(t-x)\,f(t)dt+\int_0^\pi \sin 2(t-x)f(t)dt+\text{etc.}\right\}$$

$$=\pi\,f(x)+\sqrt{-1}\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)\,f(2t+x)dt.$$

$$(\text{II}')\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt+\int_0^\pi \cos(t+x)\,f(t)dt+\int_0^\pi \cos 2(t+x)\,f(t)dt+\text{etc.}+$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\int_0^\pi \sin(t+x)\,f(t)dt+\int_0^\pi \sin 2(t+x)\,f(t)dt+\text{etc.}\right\}$$

$$+\sqrt{-1}\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\cot(t)\,f(2t-x)dt.$$

Cela posé, on tire des form. (I′) et (II′) respectivement :

$$(41)\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt+\int_0^\pi \cos(t-x)\,f(t)dt+\int_0^\pi \cos 2(t-x)\,f(t)dt$$

$$+\text{ etc. à l'infini}=\pi\,f(x),\quad 0<x<\pi.$$

$$(42)\quad \int_0^\pi \sin(t-x)\,f(t)dt+\int_0^\pi \sin 2(t-x)\,f(t)dt+\text{etc. à l'infini}=$$

$$\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)\,f(2t+x)dt;\qquad 0<x<\pi.$$

et,

$$(43)\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt+\int_0^\pi \cos(t+x)\,f(t)dt+\int_0^\pi \cos 2(t+x)\,f(t)dt+\text{etc.}=0,$$

$$(44)\quad \int_0^\pi \sin(t+x)f(t)dt+\int_0^\pi \sin 2(t+x)\,f(t)dt+\text{etc.}=$$

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\cot(t)\,f(2t-x)dt.$$

*Corollaire* 2. En mettant les équations (41) et (43) sous les formes :

$$\pi\,\mathrm{f}(x) = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{f}(t)dt + \int_0^\pi \cos x \cos t\, \mathrm{f}(t)\,dt + \int_0^\pi \cos 2x \cos 2t\, \mathrm{f}(t)dt + \text{etc.}$$

$$+ \int_0^\pi \sin x \sin t\, \mathrm{f}(t)dt + \int_0^\pi \sin 2x \sin 2t\, \mathrm{f}(t)dt + \text{etc.},$$

$$0 = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{f}(t)dt + \int_0^\pi \cos x \cos t\, \mathrm{f}(t)dt + \int_0^\pi \cos 2x \cos 2t\, \mathrm{f}(t)dt - \text{etc.}$$

$$- \int_0^\pi \sin x \sin t\, \mathrm{f}(t)dt - \int_0^\pi \sin 2x \sin 2t\, \mathrm{f}(t)dt - \text{etc.}:$$

On en tire, par addition et soustraction :

$$\pi\,\mathrm{f}(x) = \int_0^\pi \mathrm{f}(t)dt + \Big[2\int_0^\pi \cos t\, \mathrm{f}(t)dt\Big] \cos x +$$

$$\Big[2\int_0^\pi \cos 2t\, \mathrm{f}(t)dt\Big] \cos 2x + \text{etc.}, \quad 0 < x < \pi; \qquad (45)$$

$$\pi\,\mathrm{f}(x) = \Big[2\int_0^\pi \sin t\, \mathrm{f}(t)dt\Big] \sin x + \Big[2\int_0^\pi \sin 2t\, \mathrm{f}(t)dt\Big] \sin 2x + \text{etc.}$$
$$0 < x < \pi. \qquad (46)$$

La 1re de ces deux formules subsiste encore pour $x = 0, x = \pi$. Soit pour abréger :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{f}(t)dt = \mathrm{A}_0, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos t\, \mathrm{f}(t)dt = \mathrm{A}_1, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos 2t\, \mathrm{f}(t)dt = \mathrm{A}_2, \text{ etc.}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nt\, \mathrm{f}(t)dt = \mathrm{A}_n,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\, \mathrm{f}(t)dt = \mathrm{B}_1, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin 2t\, \mathrm{f}(t)dt = \mathrm{B}_2, \text{ etc.}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nt\, \mathrm{f}(t)dt = \mathrm{B}_n.$$

On peut écrire aussi :

$$f(x)=\tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\text{etc.}\quad 0\leqq x\leqq\pi, \qquad (47)$$

$$f(x)=B_1\sin x+B_2\sin 2x\ \text{etc.}\quad 0<x<\pi, \qquad (48)$$

qui donnent le développement de la fonction arbitraire $f(x)$ en séries procédant suivant les cosinus et les sinus des multiples de $x$, $x$ étant compris entre 0 et $\pi$.

En traitant de la même manière les équations (42) et (44), on trouve d'abord en développant :

$$\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)\,f(2t+x)dt=\int_0^\pi \sin t\,f(t)dt\cos x+\int_0^\pi\cos 2t\,f(t)dt\cos 2x+\text{etc.}$$

$$-\int_0^\pi\cos t\,f(t)dt\sin x-\int_0^\pi\cos 2t\,f(t)\,dt\sin 2x-\text{etc.}$$

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\cot(t)f(2t-x)dt=\int_0^\pi\sin t\,f(t)dt\cdot\cos x+\int_0^\pi\sin 2t\,f(t)dt\cdot\cos 2x+\text{etc.}$$

$$+\int_0^\pi\cos t\,f(t)dt\cdot\sin x+\int_0^\pi\cos 2t\,f(t)dt\cdot\sin 2x+\text{etc.}$$

puis on obtient, par addition et soustraction :

$$(49)\quad \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)\,f(2t+x)dt+\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\cot t\,f(2t-x)dt\cdot\cos x=$$

$$2\int_0^\pi\sin t\,f(t)dt\cdot\cos x+2\int_0^\pi\sin 2t\,f(t)dt\cdot\cos 2x+\text{etc.}$$

$$(50)\quad \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\cot(t)\,f(2t-x)dt-\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)\,f(2t+x)dt=$$

$$2\int_0^\pi\cos t\,f(t)dt\cdot\sin x+2\int_0^\pi\cos 2t\,f(t)dt\cdot\sin 2x+\text{etc.}$$

Ces formules subsistent pour $0<x<\pi$; la 1^re a encore lieu pour $x=0$, $x=\pi$.

## 2me Problème.

*c désignant un nombre positif quelconque, trouver la somme de chacune des séries infinies*

$$\tfrac{1}{2}\int_0^c f(t)dt+\int_0^c e^{(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\int_0^c e^{2(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\text{ etc.},$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^c f(t)dt+\int_0^c e^{(t+x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\int_0^c e^{2(t+x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\text{ etc.}$$

*Solution.* Les form. (I) et (II) supposent la condition $0<x<\pi$; il est donc permis d'y changer $x$ en $\frac{\pi x'}{c}$, puisque la relation $0<\frac{\pi x'}{c}<\pi$ subsistera alors également, ainsi que la suivante, qui s'en déduit, $0<x'<c$. Si donc, dans les formules citées, nous remplaçons $x$ et $t$ respectivement par $\frac{\pi x}{c}$, $\frac{\pi t}{c}$, et qu'à la place de $f(\frac{\pi x}{c})$, $f(\frac{\pi t}{c})$, nous mettions simplement $f(x)$, $f(t)$, ces mêmes formules deviennent :

$$\text{(III)}\quad f(x)+\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{c}\left[\int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} f(2t+x)\cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)dt\right]=\frac{1}{2c}\int_0^c f(t)dt+$$
$$\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\text{ etc.}$$
$$0<x<c;$$

$$\text{(IV)}\quad \sqrt{-1}\cdot\frac{1}{c}\left[\int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} f(2t-x)\cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)dt\right]=\frac{1}{2c}\int_0^c f(t)dt+$$
$$\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\text{ etc.}$$
$$0<x<c.$$

Observons que, pour $x=0$, les premiers membres de ces formules sont égaux, par conséquent, en les ajoutant, on aura, pour cette valeur de $x$ :

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{f}(0)+\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{c}\Big[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathrm{f}(2t)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt\Big]=\frac{1}{2c}\int_0^c\mathrm{f}(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi t}{c}\sqrt{-1}}\mathrm{f}(t)dt+\text{etc.}$$

Pour $x=c$, les premiers membres des formules (III) et (IV) sont encore égaux; si donc on ajoute ces formules, on obtiendra, pour cette valeur de $x$ :

$$\mathrm{f}(c)+\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2c}\Big[\int_0^{\pi}\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)\mathrm{f}(2t-c)dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt\Big\{\mathrm{f}(2t-c)+\mathrm{f}(c-2t)\Big\}\Big]=\frac{1}{2c}\int_0^c\mathrm{f}(t)dt-\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi t}{c}\sqrt{-1}}\mathrm{f}(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi t}{c}\sqrt{-1}}\mathrm{f}(t)dt-\text{etc.}$$

*Corollaire* 1. En développant les exponentielles dans les form. (III) et (IV) on a :

$$\mathrm{f}(x)+\sqrt{-1}\,\frac{1}{c}\Big[\int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)}\mathrm{f}(2t+x)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt\Big]=\frac{1}{2c}\int_0^c\mathrm{f}(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c\cos\frac{\pi(t-x)}{c}\mathrm{f}(t)dt+\text{etc.}+\sqrt{-1}\Big[\frac{1}{c}\int_0^c\sin\frac{\pi(t-x)}{c}\mathrm{f}(t)dt+\text{etc.}\Big],$$

$$\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{c}\Big[\int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)}\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)\mathrm{f}(2t-x)dt\Big]=\frac{1}{2c}\int_0^c\mathrm{f}(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c\cos\frac{\pi(t+x)}{c}\mathrm{f}(t)dt+\text{etc.}+\sqrt{-1}\Big[\frac{1}{c}\int_0^c\sin\frac{\pi(t+x)}{c}\mathrm{f}(t)dt+\text{etc.}\Big];$$

d'où l'on tire, par la comparaison des termes réels et des coëfficients de $\sqrt{-1}$, les quatre formules :

$$f(x)=\frac{1}{2c}\int_0^c f(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c \cos\frac{\pi(t-x)}{c}f(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c \cos\frac{2\pi(t-x)}{c}f(t)dt + \text{etc.},\quad 0<x<c \quad (51)$$

$$\int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)f(2t+x)dt=\int_0^c \sin\frac{\pi(t-x)}{c}f(t)dt+\int_0^c \sin\frac{2\pi(t-x)}{c}f(t)dt + \text{etc.}, \quad (52)$$

$$0=\frac{1}{2c}\int_0^c f(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c \cos\frac{\pi(t+x)}{c}f(t)dt+\frac{1}{c}\int_0^c \cos\frac{2\pi(t+x)}{c}f(t)dt + \text{etc.}, \quad (53)$$

$$\int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)f(2t-x)dt=\int_0^c \sin\frac{\pi(t+x)}{c}f(t)dt+\int_0^c \sin\frac{2\pi(t+x)}{c}f(t)dt + \text{etc.} \quad (54)$$

*Corollaire* 2. Les formules (51), (53) donnent, par addition et soustraction :

$$f(x)=\frac{1}{c}\int_0^c f(t)dt+\left[\frac{2}{c}\int_0^c \cos t\, f(t)dt\right]\cos x+\left[\frac{2}{c}\int_0^c \cos 2t\, f(t)dt\right]\cos 2x + \text{etc.},\quad c \geqq x \geqq 0. \quad (55)$$

$$f(x)=\left[\frac{2}{c}\int_0^c \sin t\, f(t)dt\right]\sin x+\left[\frac{2}{c}\int_0^c \sin 2t\, f(t)dt\right]\sin 2x + \text{etc.},\quad c>x>0. \quad (56)$$

Fesons, pour abréger :

$$\frac{1}{c}\int_0^c f(t)dt=\tfrac{1}{2}A_0,\ \frac{2}{c}\int_0^c \cos t\, f(t)dt=A_1,\ \text{etc.}\ \frac{2}{c}\int_0^c \cos nt\, f(t)dt=A_n,$$

$$\frac{2}{c}\int_0^c \sin t\, f(t)dt=B_1,\ \frac{2}{c}\int_0^c \sin 2t\, f(t)dt=B_2,\ \text{etc.}\ \frac{2}{c}\int_0^c \sin nt\, f(t)dt=B_n;$$

Ces dernières formules s'exprimeront très-simplement de cette manière :

$$f(x)=\tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\text{etc.},\quad c\geqq x\geqq 0, \quad (57)$$

$$f(x)=B_1\sin x+B_2\sin 2x+\text{etc.}.\quad c>x>0. \quad (58)$$

En traitant de la même manière les formules (52), (54), on obtient :

$$(59)\quad \int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t-x)dt + \int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t+x)dt =$$

$$\left[2\int_0^c \sin t\, f(t)dt\right]\cos x + \left[2\int_0^c \sin 2t\, f(t)dt\right]\cos 2x + \text{etc.}\quad c \geqq x \geqq 0,$$

$$(60)\quad \int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t-x)dt - \int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t+x)dt =$$

$$\left[2\int_0^c \cot f(t)dt\right]\sin x + \left[2\int_0^c \cos 2t\, f(t)dt\right]\sin 2x + \text{etc.}\quad c > x > 0.$$

### 3^me^ Problème.

*Chercher la somme de chacune des séries infinies*

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc.},$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(t+x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2(t+x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc.}$$

*Solution.* On a, par la form. (31),

$$\tfrac{1}{2} + e^{(t-x)\sqrt{-1}} + e^{2(t-x)\sqrt{-1}} + e^{n(t-x)\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{\sin(2n+1)\dfrac{t-x}{2}}{2\sin\dfrac{t-x}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\cot\left(\frac{t-x}{2}\right) - \frac{\cos(2n+1)\dfrac{-x}{2}}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\right].$$

En multipliant celle-ci par $f(t)dt$, et en intégrant entre les limites $-\pi$, $\pi$ il vient :

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \ldots +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}} f(t)dt +$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\frac{t-x}{2}\right) f(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2+1n)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} f(t)dt\right].$$

Si $n$ est infini, le 1$^{er}$ membre de cette formule se change en une série d'une infinité de termes, qui, dans le cas de convergence, aura une somme, et cette somme sera la valeur qu'obtiendra le 2$^{d}$ membre dans l'hypothèse de $n$, ou de $2n+1$ infini. Cherchons cette valeur. Pour cela mettons la formule précédente sous cette forme :

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \ldots +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{t+x}{2}}{\sin\frac{t+x}{2}} f(-t)dt +$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} f(t)dt + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\frac{t-x}{2}\right) f(t)dt +\right.$$

$$\left.\int_{0}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)\frac{t+x}{2}}{\sin\frac{t+x}{2}} f(-t)dt - \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} f(t)dt\right].$$

Fesons $2n+1=k$, ensuite 1° $\frac{1}{2}(t-x)=u$ ou $t=2u+x$; alors les limites $t=\left\{\begin{matrix}\pi\\ 0\end{matrix}\right.$, deviennent $u=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}(\pi-x)\\ -\frac{1}{2}x\end{matrix}\right.$, et les limites

$t=\left\{\begin{matrix}\pi\\ \\ -\pi\end{matrix}\right.$, se changent en $u=\left\{\begin{matrix}-\frac{1}{2}(\pi-x)\\ \\ -\frac{1}{2}(\pi+x)\end{matrix}\right.$.

Fesons 2° $\frac{1}{2}(t+x)=u$ ou $t=2u-x$, on obtiendra, à la place des limites $t=\left\{\begin{matrix}\pi\\ \\ 0\end{matrix}\right.$, les suivantes : $u=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}(\pi+x)\\ \\ \frac{1}{2}x\end{matrix}\right.$.

Cela posé, la formule précédente devient :

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}e^{(t-x)\sqrt{-1}}\mathrm{f}(t)dt+\ldots+\int_{-\pi}^{\pi}e^{n(t-x)\sqrt{-1}}\mathrm{f}(t)dt=$$

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\sin ku}{\sin u}\mathrm{f}(x-2u)du+\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}\mathrm{f}(2u+x)du+$$

$$\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(u)\,\mathrm{f}(2u+x)du+\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\cos ku}{\sin u}\mathrm{f}(x-2u)du-\right.$$

$$\left.\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}\mathrm{f}(2u+x)du\right],=-\int_{0}^{\frac{1}{2}x}\frac{\sin ku}{\sin u}\mathrm{f}(x-2u)du+$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\sin ku}{\sin u}\mathrm{f}(x-2u)du+\int_{0}^{\frac{1}{2}x}\frac{\sin ku}{\sin u}\mathrm{f}(x-2u)du+$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}\mathrm{f}(2u+x)du+\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(u)\,\mathrm{f}(2u+x)du-\right.$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}x}\frac{\cos ku}{\sin u}\mathrm{f}(x-2u)du+\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\cos ku}{\sin u}\mathrm{f}(x-2u)du+$$

$$\left.\int_{0}^{\frac{1}{2}x}\frac{\cos ku}{\sin u}\mathrm{f}(x-2u)du-\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}\mathrm{f}(2u+x)du\right],$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin kt}{\sin t} f(x-2t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin kt}{\sin t} f(2t+x)dt +$$

$$\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)\, f(2t+x)dt + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\cos kt}{\sin t} f(x-2t)dt -$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\cos kt}{\sin t} f(2t+x)dt \Big].$$

Mais si $x$ est compris entre $\pi$ et $-\pi$, la valeur absolue de $x$ sera plus petite que $\pi$, et l'on aura aussi $\frac{1}{2}x < \pi$, $\frac{1}{2}(\pi+x) < \pi$, $\frac{1}{2}(\pi-x) < \pi$; donc, pour $n$ infini, et par suite, pour $k = \infty$, on aura, en ayant égard aux form. (20) et (30) :

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc.} =$$

$$\frac{\pi}{2} f(x-0) + \frac{\pi}{2} f(x+0) + \sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)\, f(2t+x)dt\Big].$$

Si la fonction arbitraire $f(x)$ reste finie et conserve une valeur unique pendant que $x$ parcourt l'intervalle $-\pi, \pi$, on a :

$$f(x-0) = f(x+0) = f(x),$$

et dans cette hypothèse la formule précédente devient :

$$\text{(V)} \quad \pi f(x) + \sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)\, f(2t+x)dt\Big] =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc.}$$

En changeant ici $x$ en $-x$, on a encore :

$$\text{(VI)} \quad \pi f(-x) + \sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi-x)}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t)\, f(2t-x)dt\Big] =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(t+x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2(t+x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc.}$$

*Corollaire* 1. L'équation (V) se décompose en deux autres, savoir :

$$\pi f(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-x)f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2(t-x)f(t)dt + \text{etc.}, \quad -\pi < x < \pi. \quad (61)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)f(2t+x)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-x)f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2(t-x)f(t)dt + \text{etc.} \quad -\pi < x < \pi. \quad (62)$$

L'équation (VI) donne pareillement :

$$\pi f(-x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+x)f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2(t+x)f(t)dt + \text{etc.}, \quad -\pi < x < +\pi. \quad (63)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}(\pi-x)}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t)f(2t-x)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+x)f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2(t+x)f(t)dt + \text{etc.}, \quad -\pi < x < \pi. \quad (64)$$

*Corollaire* 2. En ajoutant et en retranchant les form. (61), (63), on obtient sans peine :

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \text{etc.} \quad -\pi < x < \pi,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt; \quad (65)$$

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2} = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \text{etc.} \quad -\pi < x < \pi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt. \quad (66)$$

*Corollaire* 3. En ajoutant les form. (65) et (66), on obtient :

$$(67) \quad f(x) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \text{etc.} + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \text{etc.} \quad -\pi < x < \pi,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Pour $x = \pm\pi$, la somme de cette série est $\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$.

### 4$^{me}$ Problème.

*Trouver la somme de chacune des séries infinies*

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} e^{\frac{2\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} e^{\frac{\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} e^{\frac{2\pi(t+x)}{c}\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc.}$$

*Solution.* Les formules (V) et (VI) subsisteront encore en y fesant $x = \frac{\pi x'}{c}$; mais alors la condition $\pi > \frac{\pi x'}{c} > -\pi$ se change en $c > x' > -c$. Remplaçons donc, dans (V) et (VI), $x$ et $t$, respectivement $\frac{\pi x}{c}$, $\frac{\pi t}{c}$, puis écrivons, pour abréger $f(x)$, $f(t)$ à la place de $f(\frac{\pi x}{c})$, $f(\frac{\pi t}{c})$, ces formules deviendront :

$$\text{(VII)} \quad f(x) + \sqrt{-1}\cdot\frac{1}{c}\Big[\int_{-\frac{\pi}{2c}(c+x)}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) dt\, f(2t+x)\Big] =$$

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc.},$$

$$\text{(VIII)} \quad f(-x) + \sqrt{-1}\cdot\frac{1}{c}\Big[\int_{-\frac{\pi}{2c}(c-x)}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t-x)\, dt\Big] =$$

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} e^{\frac{\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \text{etc.}$$

Pour $x=c$, les seconds membres seront égaux, et l'on obtient, en ajoutant :

$$\frac{f(c)+f(-c)}{2}+\frac{1}{c}\sqrt{-1}\left\{\int_0^\pi \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)\left[\frac{f(2t-c)-f(c-2t)}{2}\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)dt-\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} e^{\frac{\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)dt+\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} e^{\frac{2\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)dt-\text{etc.}$$

*Corollaire* 1. Les équations (VII) se partagent en deux autres, savoir :

$$f(x)=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)dt+\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}\cos\frac{\pi(t-x)}{c}+\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}\cos\frac{2\pi(t-x)}{c}f(t)dt$$
$$+\text{etc.,} \qquad (68)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2c}(c+x)}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t+x)\,dt=$$

$$\int_{-c}^{c}\sin\frac{\pi(t-x)}{c}f(t)dt+\int_{-c}^{c}\sin\frac{2\pi(t-x)}{c}f(t)dt+\text{etc.} \qquad (69)$$

Les form. (VIII) fournissent de même :

$$f(-x)=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)dt+\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}\cos\frac{\pi(t+x)}{c}f(t)dt+\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}\cos\frac{2\pi(t-x)}{c}f(t)dt$$
$$+\text{etc.,} \qquad (70)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2c}(c-x)}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t-x)\,dt=$$

$$\int_{-c}^{c}\sin\frac{\pi(t+x)}{c}f(t)dt+\int_{-c}^{c}\sin\frac{2\pi(t+x)}{c}f(t)dt+\text{etc.} \qquad (71)$$

*Corollaire* 2. Des form. (68) et (70) on tire aisément, par addition et soustraction :

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos\frac{\pi x}{c}+A_2\cos\frac{2\pi x}{c}+\text{ etc.}$$

$$-c<x<c \quad (72)$$

$$A_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(t)\cos\frac{n\pi t}{c}\,dt\,;$$

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=B_1\sin\frac{\pi x}{c}+B_2\sin\frac{2\pi x}{c}+\text{ etc.}\quad -c<x<c. \quad (73)$$

$$B_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(t)\sin\frac{n\pi t}{c}\,dt.$$

*Corollaire* 3. En ajoutant (72) et (73) on obtient :

$$f(x)=\tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos\frac{\pi x}{c}+A_2\cos\frac{2\pi x}{c}+\text{etc.}+$$

$$B_1\sin\frac{\pi x}{c}+B_2\sin\frac{2\pi x}{c}+\text{etc.}\quad -c<x<c. \quad (74)$$

Nous allons donner quelques applications de ces formules. Ces applications sont de deux sortes ; les unes servent à montrer l'usage qu'on en fait pour le développement des fonctions en séries procédant suivant les sinus et les cosinus des arcs multiples ; les autres à faire connaître leur utilité dans la détermination de la valeur des intégrales définies.

## APPLICATIONS DE LA 1re ESPÈCE.

### 1er Exemple.

*Trouver le développement de la fonction*

$$f(x)=e^{ax}+e^{-ax},$$

*en série ordonnée suivant les cosinus des multiples croissants de* x.

*Solution.* Pour effectuer ce développement, prenons la formule (47) :

$$(\alpha)\quad f(x)=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\text{ etc.}\quad 0\leqq x\leqq\pi,$$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\, f(x)dx.$$

Comme on a ici $f(x)=e^{ax}+e^{-ax}$, il vient :

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (e^{ax}+e^{-ax})\cos nx dx.$$

Pour déterminer cette intégrale on a :

$$\int e^{ax}\cos nx dx=\frac{n\sin nx+a\cos nx}{a^2+n^2}e^{ax} ;$$

d'où : $$\int_0^\pi e^{ax}\cos nx dx=\frac{a[e^{a\pi}\cos n\pi-1]}{a^2+n^2},$$

$$\int_0^\pi (e^{ax}+e^{-ax})\cos nx dx=\frac{a[e^{a\pi}-e^{-a\pi}]}{a^2+n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{a[e^{a\pi}-e^{-a\pi}]}{a^2+n^2};$$

donc $$A_n=\frac{2}{\pi}\cdot(-1)^n a\cdot\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a^2+n^2}.$$

Pour $n=0, 1, 2$, etc., on a :

$$A_0=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a},\quad A_1=-\frac{2}{\pi}a\cdot\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a^2+1},\quad A_2=\frac{2}{\pi}a\cdot\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a^2+2^2},$$

etc.;

par conséquent $(\alpha)$ donne :

$$e^{ax}+e^{-ax}=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{a}-\frac{2a}{a^2+1}\cos x+\frac{2a}{a^2+2^2}\cos 2x+\frac{2a}{a^2+3^2}\cos 3x+\text{etc.}\right\}\quad (75)$$

2$^{me}$ Exemple.

*Développer* $\sin\mu x$, $\mu<1$, *suivant les sinus des multiples de* x.

*Solution.* Pour effectuer ce développement nous prendrons la form. (48) :

$(\alpha)$, $f(x)=B_1\sin x+B_2\sin 2x+$ etc. $0<x<\pi$,

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\, f(x)dx.$$

On a ici : $$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\mu x\sin nx dx.$$

Mais on a :

$$\int \sin\mu x \sin nx dx = \tfrac{1}{2}\int \cos(n-\mu)x dx - \tfrac{1}{2}\int \cos(n+\mu)dx,$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{\sin(n-\mu)x}{n-\mu} - \frac{\sin(n+\mu)x}{n+\mu} \right\};$$

d'où : $\quad B_n = \frac{2}{\pi}\sin\mu\pi \cdot \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-\mu^2}.$

En fesant $n=1,2$, etc., la form. $(\alpha)$ donne :

$$\sin\mu x = \frac{2}{\pi}\sin\mu\pi \left\{ \frac{\sin x^2}{1-\mu^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-\mu^2} - \text{etc.} \right\} \qquad (76)$$

### 3me Exemple.

*Développer* $e^{ax} - e^{-ax}$ *suivant les sinus des multiples de* x.

***Solution.*** Nous avons :

$$\int e^{ax}\sin nx dx = \frac{a\sin nx - n\cos nx}{a^2+n^2} e^{ax},$$

$$\int_0^\pi e^{ax}\sin nx dx = \frac{n(1-e^{a\pi}\cos n\pi)}{a^2+n^2},$$

$$\int_0^\pi (e^{ax}-e^{ax})\sin nx dx = \frac{-n(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{a^2+n^2}\cos n\pi = \frac{n(-1)^{n+1}(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{a^2+n^2};$$

donc $\quad B_n = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{n}{a^2+n^2}\left\{ e^{a\pi} - e^{-a\pi} \right\};$

d'où : $e^{ax} - e^{-ax} = \frac{2}{\pi}(e^{a\pi}-e^{-a\pi})\left\{ \frac{\sin x}{a^2+1} - \frac{2\sin 2x}{a^2+2^2} + \frac{3\sin 3x}{a^2+3^2} - \text{etc.} \right\} \qquad (77)$

## APPLICATIONS DE LA 2me ESPÈCE.

### 1er Exemple.

*Trouver la valeur des intégrales*

$$\int_0^\pi \frac{r\sin x \sin nx}{1-2r\cos x + r^2}dx, \quad \int_0^\pi e^{r\cos x}\sin(r\sin x)\sin nx dx,$$

$$\int_0^\pi \text{arc tg}\frac{r\sin x\sin nx}{1-r\cos x}dx.$$

*Solution.* On a, (Voy. Cauchy, *Cours d'Anal.*, ch. IX),

$$1^\circ, \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}=r\sin x+r^2\sin 2x+r^3\sin 3x+\text{etc.}\quad 1>r>-1.$$

Or, en comparant cette formule avec la relation (48),

$$f(x)=B_1\sin x+B_2\sin 2x+\text{etc.},\ B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\, f(x)dx,$$

on trouve $r^n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\frac{r\sin x dx}{1-2r\cos x+r^2}$; d'où :

$$\int_0^\pi \frac{r\sin x\sin nx}{1-2r\cos x+r^2}dx=\frac{\pi r^n}{2}.\qquad 1>r>-1.\qquad (78)$$

$$2^\circ,\ e^{r\cos x}\sin(r\sin x)=r\sin x+\frac{r^2}{1\cdot 2}\sin 2x+\frac{r^3}{1\cdot 2\cdot 3}\sin 3x+\text{etc.},$$

$$1\geqq r\geqq -1.$$

Or, en comparant cette form. avec la relation (48), on trouve :

$$\frac{r^n}{1\cdot 2..n}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\cdot e^{r\cos x}\sin(r\sin x)dx;$$

d'où :

$$\int_0^\pi e^{r\cos x}\sin(r\sin x)\sin nx dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r^n}{1\cdot 2..n}.\qquad 1\geqq r\geqq -1.\qquad (79)$$

$$3^\circ,\ \text{arc tg}\frac{r\sin x}{1+r\cos x}=r\sin x-\frac{r^2}{2}\sin 2x+\frac{r^3}{3}\sin 3x-\text{etc.},$$

$$1\geqq r\geqq -1,$$

ou, en changeant $r$ en $-r$,

$$\text{arc tg}\frac{r\sin x}{1-r\cos x}=r\sin x+\frac{r^2}{2}\sin 2x+\frac{r^3}{3}\sin 3x-\text{etc.}$$

En comparant cette formule avec la relation (48), on trouve :

$$\int_0^\pi \text{arc tg}\frac{r\sin x\sin nx}{1-r\cos x}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r^n}{n}.\qquad 1\geqq r\geqq -1.\qquad (80)$$

### 2$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^\pi \frac{(1-r^2)\cos nx dx}{1-2r\cos x+r^2}, \int_0^\pi [e^{r\cos x}\cos(r\sin x)-\tfrac{1}{2}]\cos nx dx,$$

$$\int_0^\pi \left\{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}l[1-2r\cos x+r^2]\right\}\cos nx dx.$$

*Solution.* On a, (Voy. Cauchy, *Cours d'Anal.*, ch. IX),

1°, $\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}=1+r\cos x+r^2\cos 2x+r^3\cos 3x+\text{etc.}$;

d'où : $1>r>-1$;

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=\tfrac{1}{2}+r\cos x+r^2\cos 2x+r^3\cos 3x+\text{etc.}$$

En comparant cette relation avec la form. (47), on trouve :

$$r^n=\frac{2}{\pi}\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{(1-r^2)\cos nx dx}{1-2r\cos x+r^2}; \quad \text{d'où :}$$

$$\int_0^\pi \frac{(1-r^2)\cos nx dx}{1-2r\cos x+r^2}=\frac{\pi}{2}\cdot 2r^n. \quad 1>r>-1. \quad (81)$$

2°, $e^{r\cos x}\cos(r\sin x)=1+r\cos x+\frac{r^2}{1\cdot 2}\cos 2x+\frac{r^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cos 3x$
$+\text{etc.}$; $1\geqq r\geqq -1$

d'où :

$$e^{r\cos x}\cos(r\sin x)-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}+r\cos x+\frac{r^2}{1\cdot 2}\cos 2x+\frac{r^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cos 3x+\text{etc.}$$

En comparant cette relation avec la form. (47), on trouve :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [e^{r\cos x}\cos(r\sin x)-\tfrac{1}{2})]\cos nx dx=\frac{r^n}{1\cdot 2..n}; \quad \text{d'où :}$$

$$\int_0^\pi [e^{r\cos x}\cos(r\sin x)-\tfrac{1}{2}]\cos nx dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r^n}{1\cdot 2..n}; \quad \text{ou :}$$

$$\int_0^\pi e^{r\cos x}\cos(r\sin x)\cos nx dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r^n}{1\cdot 2..n}, \text{ pour } n>0; \quad (82)$$

$$\int_0^\pi e^{r\cos x}\cos(r\sin x)dx = \pi\,, \text{ pour } n=0. \qquad (83)$$

3°, $\frac{1}{2}l(1+2r\cos x+r^2) = r\cos x - \frac{r^2}{2}\cos 2x + \frac{r^3}{3}\cos 3x - \text{etc.},$

d'où : $1 \geqq r \geqq -1$,

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}l(1-2r\cos x+r^2) = \tfrac{1}{2} + r\cos x + \frac{r^2}{2}\cos 2x + \frac{r^3}{3}\cos 3x + \text{etc.}$$

En comparant cette form. avec (47), on trouve :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}l(1-2r\cos x+r^2)\right]\cos nx dx = \frac{r^n}{n}; \text{ d'où l'on tire :}$$

$$\int_0^\pi \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}l(1-2r\cos x+r^2)\right]\cos nx dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{r^n}{n}; \qquad \text{ou :}$$

$$\int_0^\pi l(1-2r\cos x+r^2)\cos nx dx = -\frac{\pi r^n}{n}, \text{ pour } n>0; \qquad (84)$$

$$\int_0^\pi l(1-2r\cos x+r^2)dx = 0\,, \text{ pour } n=0. \qquad (85)$$

3$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales*

$$\int_0^\pi \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\cot\tfrac{1}{2}x dx\,,\quad \int_0^\pi \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x dx\,,$$

$$\int_0^\pi \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\operatorname{cosé} x dx\,,\quad \int_0^\pi \frac{(1-r^2)\operatorname{séc} x}{1-2r\cos x+r^2}.$$

*Solut.* 1°, Nous avons trouvé : $\int_0^\pi \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}dx = \frac{\pi}{2}r^n. \qquad (\alpha)$

Fesons $n = 1, 2, 3, \ldots n$, puis ajoutons, il vient :

$$\int_0^\pi \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\left\{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx\right\}dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{r+r^2+r^3+\ldots+r^n\right\}.$$

Mais à cause de

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}-\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

il vient :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\cot\tfrac{1}{2}x\,dx-\tfrac{1}{2}\int_0^\pi\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\cdot\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}\left\{r+r^2+\ldots+r^n\right\};$$

pour $2n+1=k=\infty$, le 2[d] terme à gauche disparait en vertu de la form. (30); et comme $r+r^2+r^3+\text{etc.}=\frac{r}{1-r}$, la formule précédente devient :

$$\int_0^\pi\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\cot\tfrac{1}{2}x\,dx=\pi\frac{r}{1-r},\quad 1>r>-1.\qquad(86)$$

2°, Fesons dans la même form. ($\alpha$) $n=1,2,3,\ldots n$, puis ajoutons, après avoir donné aux résultats alternativement le signe $+$ et $-$, on a :

$$\int_0^\pi\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\left\{\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\text{etc.}+\sin nx\right\}dx=\frac{\pi}{2}\left\{r-r^2+r^3-\ldots+r^n\right\}.$$

Mais on a :

$$\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\ldots+\sin nx=\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x+\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}};$$

donc :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\,dx+\tfrac{1}{2}\int_0^\pi\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\cdot\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\left\{r-r^2+r^3-\ldots+r^n\right\};$$

ou, en fesant dans la 2^me^ intégrale $x=2t$, $2n+1=k$,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r\sin 2t}{1-2r\cos 2t+r^2}\cdot\frac{\sin kt}{\cos t}dt=$$
$$\frac{\pi}{2}\left\{r-r^2+\ldots+r^n\right\}.$$

Pour $n$ infini, par suite, pour $k=\infty$, la 2^de^ intégrale à gauche disparait, à cause de (30′), et la suite infinie $r-r^2+\ldots$ aura pour somme $\frac{r}{1+r}$, on a donc :

$$\int_0^{\pi}\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\,dx=\pi\,\frac{r}{1+r}.\quad 1>r>-1.\qquad (87)$$

3°, Comme on a $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+\cot\frac{1}{2}x=2\operatorname{cos\acute{e}}x$, il vient, en ajoutant (86) et (87) :

$$\int_0^{\pi}\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\operatorname{cos\acute{e}}x\,dx=\pi\,\frac{r}{1-r^2},\quad 1>r>-1.\qquad (88)$$

4° Fesons dans la form. (81),

$$n=1,3,5,\ \ldots\ 2n+1,.$$

et ajoutons les résultats pris alternativement avec les signes + et —1, on obtient :

$$\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\Big\{\cos x-\cos 3x+\cos 5x-\ldots+$$
$$\cos(2n+1)x\Big\}dx=\pi\left\{r-r^3+\ldots+r^{2n+1}\right\}.$$

Mais on a :

$$\cos x-\cos 3x+\cos 5x-\ldots+\cos(2n+1)x=\tfrac{1}{2}\operatorname{s\acute{e}c}x+\frac{\cos(2n+2)x}{2\cos x};$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\operatorname{s\acute{e}c}x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\cdot\frac{\cos(2n+2)x}{\cos x}dx$$
$$=\pi\left\{r-r^3+\ldots+r^{2n+1}\right\}.$$

Comme on a :

$$\frac{\cos(2n+2)x}{\cos x}=\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\cos x-\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}\operatorname{tg}x\sin x,$$

on a aussi pour $k=2n+1$,

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{(1-r^2)\operatorname{séc} x}{1-2r\cos x+r^2}dx+\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\cos kx}{\cos x}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\cos x dx -$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin kx}{\sin x}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\operatorname{tg} x\sin x dx =$$

$$\pi\left\{r-r^3+\ldots+r^{2n+1}\right\}.$$

Donc, pour $k=\infty$, ou $n$ infini, on trouve, en ayant égard aux form. (28), (21),

$$\int_0^\pi \frac{(1-r^2)\operatorname{séc} x}{1-2r\cos x+r^2}dx=2\pi\frac{r}{1+r^2}, \quad 1>r>-1. \qquad (89)$$

## 3me SECTION.

### EXPRESSION DES FONCTIONS ARBITRAIRES

*par les Intégrales doubles et multiples de Fourier.*

### 1er Problème.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t}e^{-kt\sqrt{-1}}dt, \text{ pour } k=\infty.$$

*Solution.* $\varphi(x)$ étant une fonction continue entre les limites de l'intégration, et $c$ étant un nombre positif, on a, par la formule (7'), pour $k=\infty$,

$$\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z}=\int_0^c \frac{\varphi(x+t)}{t}e^{-kt\sqrt{-1}}dt.$$

Il y a maintenant plusieurs cas à distinguer.

$a>0$, $b>0$ $a<0, b<0$; $a<0, b>0$; $a>0$, $b<0$.

1^er^ Cas, a *et* b *sont positifs.*

Alors on a :

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = \int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt - \int_0^a \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt.$$

Donc, pour $k=\infty$, et à cause de la form. (7′), il vient :

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z} - \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z} = 0. \qquad (90)$$

2^me^ Cas, a *et* b *sont négatifs.*

On a, par les form. (8′) :

$$\int_0^c \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}} dt = \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}dz}{z}.$$

Cela posé, fesons dans l'intégrale $\int_{-a}^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt$, $t=-t$, on aura :

$$\int_{-a}^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = \int_a^b \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}} dt$$

$$= \int_0^b \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}} dt - \int_0^a \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}} dt;$$

donc, pour $k=\infty$, et à cause des form. (8′), il vient :

$$\int_{-a}^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt =$$

$$\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}dz}{z} - \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}dz}{z} = 0 \qquad (91)$$

3^me^ Cas, b *est positif*, a *négatif*.

On a :

$$\int_{-a}^{b}\frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt=\int_{0}^{b}\frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt+$$

$$\int_{-a}^{0}\frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt,=\int_{0}^{b}\frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt-$$

$$\int_{0}^{-a}\frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt.$$

Si dans la 2^de^ intégrale à droite nous changeons $t$ en $-t$, il vient :

$$\int_{-a}^{b}\frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt=\int_{0}^{b}\frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt-$$

$$\int_{0}^{a}\frac{\varphi(x-t)}{t}\,e^{kt\sqrt{-1}}dt.$$

Donc pour $k=\infty$, et à cause des form. (7′), (8′), il vient :

$$\int_{-a}^{b}\frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt=\varphi(x)\left[\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-z\sqrt{-1}}\,dz}{z}-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{z\sqrt{-1}}\,dz}{z}\right],$$

$$=\varphi(x)\left[\int_{0}^{\infty}\frac{\cos zdz}{z}-\sqrt{-1}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin zdz}{z}-\int_{0}^{\infty}\frac{\cos zdz}{z}\right.$$

$$\left.-\sqrt{-1}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin zdz}{z}\right],=-\pi\,\varphi(x)\sqrt{-1}.\qquad(92)$$

4^me^ Cas, a *est positif*, b *négatif*.

On a : $$\int_{a}^{-b}\frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt=\int_{-a}^{b}\frac{\varphi(x-t)}{t}\,e^{kt\sqrt{-1}}dt$$

$$=\int_{0}^{b}\frac{\varphi(x-t)}{t}\,e^{kt\sqrt{-1}}dt-\int_{0}^{-a}\frac{\varphi(x-t)}{t}\,e^{kt\sqrt{-1}}dt.$$

En changeant, dans la 2[de] intégrale à droite, $t$ en $-t$, il vient :

$$\int_{a}^{-b}\frac{\varphi(x+t)}{t}e^{-kt\sqrt{-1}}dt=\int_{0}^{b}\frac{\varphi(x-t)}{t}e^{kt\sqrt{-1}}dt-$$

$$\int_{0}^{a}\frac{\varphi(x+t)}{t}e^{-kt\sqrt{-1}}dt,\ =\varphi(x)\left[\int_{0}^{\infty}\frac{e^{z\sqrt{-1}}dz}{z}-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z}\right],$$

$$=\varphi(x)\left[\int_{0}^{\infty}\frac{\cos z dz}{z}+\sqrt{-1}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin z dz}{z}-\int_{0}^{\infty}\frac{\cos z dz}{z}\right.$$

$$\left.+\sqrt{-1}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin z dz}{z}\right],\ =\pi\varphi(x)\sqrt{-1}\,. \qquad (93)$$

### 2[me] Problème.

*Chercher la valeur de l'intégrale double*

$$\int_{0}^{\infty}du\int_{a}^{b}\varphi(x+t)e^{-ut\sqrt{-1}}dt.$$

*Solution.* En différentiant $e^{-kt\sqrt{-1}}$ par rapport à $k$, on a :

$$d(e^{-kt\sqrt{-1}})=-\sqrt{-1}\,t\,e^{-kt\sqrt{-1}}dk\,;$$

on tire de celle-ci :

$$\frac{e^{-kt\sqrt{-1}}}{t}=-\sqrt{-1}\int e^{-kt\sqrt{-1}}dk\,;$$

pour $k=0$, le premier membre se réduit à $\frac{1}{t}$, on a donc :

$$\frac{e^{-kt\sqrt{-1}}-1}{t}=-\sqrt{-1}\int_{0}^{k}e^{-kt\sqrt{-1}}dk. \qquad (\alpha)$$

En multipliant cette égalité par $\varphi(x+t)dt$, et en intégrant entre $a$ et $b$, on trouve :

$$\int_{a}^{b}\frac{\varphi(x+t)}{t}e^{-kt\sqrt{-1}}dt-\int_{a}^{b}\frac{\varphi(x+t)}{t}dt$$

$$=-\sqrt{-1}\int_{a}^{b}\varphi(x+t)dt\int_{0}^{k}e^{-kt\sqrt{-1}}dk\,;$$

ou, en remplaçant la variable $k$ sous le signe d'intégration du second membre, par une autre lettre $u$, on a :

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt - \int_a^b \frac{\varphi(x+t)dt}{t}$$

$$= -\sqrt{-1} \int_a^k \varphi(x+t)dt \int_0^k e^{-ut\sqrt{-1}} du$$

$$= -\sqrt{-1} \int_0^k du \int_a^k \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}} dt.$$

Donc, pour $k=\infty$, on a :

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt - \int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} dt$$

$$= -\sqrt{-1} \int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}} dt. \qquad (\beta)$$

Si $a$ et $b$ sont de même signe, le 1^er terme à gauche est nul en vertu de (90), (91), et l'on tire de $(\beta)$ :

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}} dt = -\sqrt{-1} \int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} dt.$$

$$\left.\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}\right\} \text{ ou } \begin{matrix} a<0 \\ b<0 \end{matrix}. \qquad (94)$$

Si $a$ est négatif et $b$ positif, le 1^er terme de $(\beta)$, à cause de (92), se réduit à $-\pi\varphi(x)\sqrt{-1}$ ; on a alors :

$$(95), \int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}} dt = \pi\varphi(x) - \sqrt{-1} \int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} dt,$$

$$a<0, b>0.$$

Si $a$ est positif et $b$ négatif, le 1^er terme de $(\beta)$ se réduit à $\pi\varphi(x)\sqrt{-1}$, et l'on a :

$$(96), \int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}} dt = -\pi\varphi(x) - \sqrt{-1} \int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} dt.$$

$$a>0, b<0.$$

### 3[me] Problème.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales*

$$\int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) e^{u(x-t)\sqrt{-1}} dt, \quad \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) e^{u(x+t)\sqrt{-1}} dt.$$

*Solution.* 1°. Si dans les form. (95) on prend $a$ et $b$ avec leurs signes explicites, savoir :

$$\int_0^\infty du \int_{-a}^{b} \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}} dt = \pi\varphi(x) - \sqrt{-1}\int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x+t)}{t} dt,$$

et qu'on y pose $t = t' - x$, on aura, en omettant les accents :

$$\pi\varphi(x) + \sqrt{-1}\int_{x-a}^{b+x} \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_{x-a}^{b+x} \varphi(t) e^{-u(t-x)\sqrt{-1}} dt. \quad (96')$$

Dans cette relation on a : $b+x > x > x-a$; soit $\beta = b+x$, $\alpha = x-a$, elle devient :

$$(a), \quad \pi\varphi(x) + \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) e^{u(x-t)\sqrt{-1}} dt, \quad \beta > x > \alpha.$$

2°. Fesons dans (94) $t = t' - x$, on aura, en omettant les accents :

$$\sqrt{-1}\int_{a+x}^{b+x} \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_{a+x}^{b+x} \varphi(t) e^{-u(t-x)\sqrt{-1}} dt.$$

On a ici $x < a+x < b+x$, ou $x > a+x > b+x$, selon que $a$ et $b$ sont positifs ou négatifs. En supposant ces limites positives, et en posant $a+x = \alpha$, $b+x = \beta$, on aura :

$$(97), \quad \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) e^{-u(t-x)\sqrt{-1}} dt. \quad x < \alpha < \beta.$$

Comme la condition $x < \alpha < \beta$ est remplie, pour les valeurs négatives de $x$, ou, comme on a : $-x < \alpha < \beta$, on peut changer dans (98) $x$ en $-x$, ce qui donne :

$$(98), \quad -\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) e^{-u(x+t)\sqrt{-1}} dt.$$

En développant l'exponentielle du 2[d] membre, on déduit de (99) les deux égalités :

$$0 = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos u(x+t) dt, \qquad (98')$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin u(x+t) dt. \qquad (98'')$$

En multipliant la 2[de] par $\sqrt{-1}$, on trouve, en ajoutant :

$$(b), \quad \sqrt{-1} \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, e^{u(x+t)\sqrt{-1}} dt, \qquad -x < \alpha < \beta.$$

La condition $-x < \alpha < \beta$ sera toujours remplie, si $x, \alpha, \beta$ sont positifs. Il suit de là que les relations ($a$) et ($b$) subsisteront alors pour $\alpha < x < \beta$. Par conséquent ces mêmes relations auront lieu aussi pour $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, puisque $x$ étant positif, on a $0 < x < \infty$.

## CAS PARTICULIERS DES FORMULES ($a$) ET ($b$).

Nous distinguons les cas particuliers suivants :

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ x = a, \ x = b,$$

$\varphi(x)$ devient discontinue pour $x = c$, $c$ étant compris entre $\alpha$ et $\beta$.

### 1[er] Cas, $\alpha = 0$.

Comme on a alors $\alpha = x - a = 0$, il vient $x = a$; il suffira donc de remplacer dans ($a$) et ($b$), $x$ par $a$ et $\alpha$ par 0.

### 2[me] Cas, $\beta = 0$.

Comme on a $\beta = x + b = 0$, d'où $x = -b$, il faudra remplacer dans ($a$) et ($b$), $x$ par $-b$, $\beta$ par 0; ce qui donne :

$$\pi\varphi(-b) - \sqrt{-1} \int_\alpha^0 \frac{\varphi(t)dt}{b+t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^0 \varphi(t)\, e^{-u(b+t)\sqrt{-1}} dt,$$

$$-\sqrt{-1} \int_\alpha^0 \frac{\varphi(t)dt}{b-t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^0 \varphi(t)\, e^{-u(b-t)\sqrt{-1}} dt;$$

ou bien :

$$\pi\varphi(-b)+\sqrt{-1}\int_0^\alpha\frac{\varphi(t)dt}{b+t}=-\int_0^\infty du\int_0^\alpha\varphi(t)e^{-u(b+t)\sqrt{-1}}dt, \quad (99)$$

$$\sqrt{-1}\int_0^\alpha\frac{\varphi(t)dt}{b-t}=-\int_0^\infty du\int_0^\infty\varphi(t)e^{-u(b-t)\sqrt{-1}}dt. \quad (100)$$

3$^{me}$ Cas, $x=\alpha$.

Comme on a $x=\alpha=x-a$, d'où $a=0$, la form. ($\beta$), du 2$^{me}$ problème devient :

$$\varphi(x)\int_0^\infty\frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z}-\int_0^b\frac{\varphi(x+t)dt}{t}$$

$$=-\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_0^b\varphi(x+t)e^{-ut\sqrt{-1}}dt; \quad \text{ou :}$$

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x)+\sqrt{-1}\,\varphi(x)\int_0^\alpha\frac{\cos zdz}{z}-\sqrt{-1}\int_0^b\frac{\varphi(x+t)dt}{t}=$$

$$\int_0^\infty du\int_0^b\varphi(x+t)\,e^{-ut\sqrt{-1}}dt.$$

Pour $t=t'-x$ on a, en supprimant les accents :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x)+\sqrt{-1}\left[\varphi(x)\int_0^\infty\frac{\cos zdz}{z}+\int_x^{b+x}\frac{\varphi(t)dt}{x-t}\right]=$$

$$\int_0^\infty du\int_x^{b+x}\varphi(t)\,e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt.$$

Comme on a $x=\alpha$, si on pose $b+\alpha=\beta$, il vient :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\alpha)+\sqrt{-1}\left[\varphi(\alpha)\int_0^\infty\frac{\cos zdz}{z}+\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(t)dt}{\alpha-t}\right]=$$

$$\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)e^{u(\alpha-t)\sqrt{-1}}dt.$$

En développant l'exponentielle du 2[d] membre, cette dernière équation se partagera en deux, savoir :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\alpha)=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u(\alpha-t)dt, \qquad (101)$$

$$\varphi(\alpha)\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z}+\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{\alpha-t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin u(\alpha-t)dt.$$

Cette dernière n'est d'aucun usage à cause de $\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z}=\infty$.

4[me] Cas, $x=\beta$.

Comme on a $x=\beta=x+b$, d'où $b=0$, la form. ($\beta$) du second problème donne :

$$\int_a^0 \frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt-\int_a^0 \frac{\varphi(x+t)dt}{t}$$

$$=-\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_a^0 \varphi(x+t)\,e^{-ut\sqrt{-1}}dt;$$

ou : $$-\int_0^a \frac{\varphi(x+t)}{t}\,e^{-kt\sqrt{-1}}dt+\int_0^a \frac{\varphi(x+t)dt}{t}$$

$$=\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_0^a \varphi(x+t)\,e^{-ut\sqrt{-1}}dt.$$

Donc : $$-\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z}+\int_0^a \frac{\varphi(x+t)}{t}dt=$$

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_0^a \varphi(x+t)\,e^{-ut\sqrt{-1}}dt;$$

ou : $$\frac{\pi}{2}\varphi(x)+\sqrt{-1}\,\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z}-\sqrt{-1}\int_0^a \frac{\varphi(x+t)}{t}dt=$$

$$\int_0^\infty du\int_0^a \varphi(x+t)\,e^{-ut\sqrt{-1}}dt.$$

Soit $t = t' - x$, il vient, en supprimant les accents :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x) + \sqrt{-1}\left[\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z} + \int_x^{a+x} \frac{\varphi(t)dt}{x-t}\right] =$$

$$\int_0^\infty du \int_x^{a+x} \varphi(t)\, e^{u(x-t)\sqrt{-1}} dt.$$

Comme on a $x = \beta$, si on fait de plus $a + \beta = \gamma$, il vient :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\beta) + \sqrt{-1}\left[\varphi(\beta)\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z} + \int_\beta^\gamma \frac{\varphi(t)dt}{\beta-t}\right] =$$

$$\int_0^\infty du \int_\beta^\gamma \varphi(t)\, e^{u(\beta-t)\sqrt{-1}} dt\,;$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\beta) = \int_0^\infty du \int_\beta^\gamma \varphi(t) \cos u(\beta - t) dt\,, \qquad (102)$$

$$\varphi(\beta)\int_0^\infty \frac{\cos zdz}{z} + \int_\beta^\gamma \frac{\varphi(t)dt}{\beta-t} = \int_0^\infty du \int_\beta^\gamma \varphi(t) \sin u(\beta - t) dt.$$

Cette dernière n'est d'aucun usage.

*Remarque.* Les valeurs des intégrales $\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{\alpha-t}$, $\int_\beta^\gamma \frac{\varphi(t)dt}{\beta-t}$,

sont supposées effectuées selon la form. (11) du 1er livre, en sorte qu'alors elles seront toujours réelles.

3me Cas, $\varphi(\text{x})$ *est discontinu pour* $\text{x} = \text{c}$, $\alpha < \text{c} < \beta$.

Dans ce cas l'équation ($a$) donne :

$$\pi\varphi(c - dc) + \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{c - dc - t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) e^{u(c-t)\sqrt{-1}} dt \cdot e^{-udc\sqrt{-1}},$$

$$\pi\varphi(c + dc) + \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{c + dc - t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) e^{u(c-t)\sqrt{-1}} dt \cdot e^{udc\sqrt{-1}}.$$

Mais à cause de $e^{-\mathrm{udc}\sqrt{-1}}=e^{\mathrm{udc}\sqrt{-1}}=1$, ces formules deviennent :

$$\pi\varphi(c-dc)+\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(t)dt}{c-t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)e^{\mathrm{u}(c-t)\sqrt{-1}}dt,$$

$$\pi\varphi(c+dc)+\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(t)dt}{c-t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)e^{\mathrm{u}(c-t)\sqrt{-1}}dt.$$

Donc, en ajoutant ces dernières :

$$\pi\left[\frac{\varphi(c-dc)+\varphi(c+dc)}{2}\right]+\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(t)dt}{c-t}=$$

$$\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)e^{\mathrm{u}(c-t)\sqrt{-1}}dt; \qquad (103)$$

on fera $dc=0$, après les développements.

## 4me Problème.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty \mathrm{du}\int_{-\infty}^\infty\varphi(\mathrm{t})\mathrm{e}^{\mathrm{u}(x-t)\sqrt{-1}}\mathrm{dt},\quad \infty>\mathrm{x}>-\infty.$$

*Solution.* On a, par la form. (96′) :

$$\pi\varphi(x)+\sqrt{-1}\int_{x-a}^{b+x}\frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_0^\infty du\int_{x-a}^{b+x}\varphi(t)e^{\mathrm{u}(x-t)\sqrt{-1}}dt,$$
$$b+x>x>x-a;$$

donc, en prenant $a=\infty$, $b=\infty$, celle-ci devient :

$$(104)\quad \pi\varphi(x)+\sqrt{-1}\int_{-\infty}^\infty\frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty\varphi(t)e^{\mathrm{u}(x-t)\sqrt{-1}}dt,$$
$$\infty>x>-\infty.$$

*Corollaire* 1. La formule précédente, en en développant l'exponentielle, se partage en deux autres qui sont :

$$\left.\begin{aligned}&(105)\quad \pi\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty\varphi(t)\cos u(x-t)dt,\\&(106)\quad \int_{-\infty}^\infty\frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty\varphi(t)\sin u(x-t)dt.\end{aligned}\right\}\infty>x>-\infty.$$

*Corollaire* 2. Comme on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)du=2\int_{0}^{\infty}\cos u(x-t)\,du\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin u(x-t)=0\,,$$

en vertu des form. (36′), (36″), du 1[er] liv., les équations (105), (106), donneront :

$$2\pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt\int_{0}^{\infty}2\cos u(x-t)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)\,du\,;$$

ou : $$2\pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\cos u(x-t)dt. \qquad (107)$$

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt\,[\int_{0}^{\infty}\sin u(x-t)\,du-\int_{0}^{\infty}\sin u(x-t)du\,]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt\,[\int_{0}^{\infty}\sin u(x-t)\,du+\int_{-\infty}^{0}\sin u(x-t)\,du\,]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\sin u(x-t)\,du\,;$$ ou,

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\sin u(x-t)dt. \qquad (108)$$

En multipliant cette dernière par $\sqrt{-1}$, et en l'ajoutant à (107), on trouve encore :

$$2\pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt. \qquad (109)$$

### 5[me] Problème.

*Chercher les valeurs des intégrales*

$$\int_{0}^{\infty}du\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt\,,\quad \int_{0}^{\infty}du\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt.$$

*Solution.* Si on développe les exponentielles des formules ($a$) et ($b$), on obtient :

$$
(110)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\pi\varphi(x) + \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u(x-t)\,dt + \\
&\qquad \sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin u(x-t)\,dt, \\
&\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t} = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u(x+t)dt + \\
&\qquad \sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin u(x+t)dt.
\end{aligned}
\right.
$$

En égalant les termes réels dans les deux membres de ces formules, elles conduisent aux relations :

$$
(110')\quad \pi\varphi(x) = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u(x-t)dt,
$$

$$
\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin u(x-t)dt, \qquad \text{ou :}
$$

$$
\pi\varphi(x) = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ut\cos ux\,dt + \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\sin ut dt,
$$

$$
0 = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\cos ut dt - \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\sin ut dt.
$$

On tire de ces dernières, par addition et soustraction :

$$
(111)\quad \frac{\pi}{2}\cdot\varphi(x) = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ut\cos ux dt, \qquad \beta > x > \alpha
$$

$$
(112)\quad \frac{\pi}{2}\cdot\varphi(x) = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ut\sin ux dt, \qquad \beta > x > \alpha.
$$

*Remarque.* La première de ces formules subsiste encore pour $x=0$, il n'en est pas de même de la seconde.

Observons aussi que (111) subsistera pour des valeurs négatives

de $x$, si l'on a $\varphi(-x)=\varphi(x)$ ; et (112) subsistera si la fonction $\varphi(x)$ jouit de la propriété $\varphi(-x)=-\varphi(x)$.

### Cas particuliers.

Comme les form. ($a$) et ($b$) ont lieu pour $\alpha=0$, il suit que l'on a :

$$(113)\qquad \frac{\pi}{2}\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_0^\beta \varphi(t)\cos ut\sin ux dt,\qquad \beta>x\geqq 0$$

$$(114)\qquad \frac{\pi}{2}\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_0^\beta \varphi(t)\sin ut\sin ux dt.\qquad \beta>x>0.$$

Pour $x=\alpha$, $x=\beta$, nous avons vu, dans les cas particuliers du 3[me] problème, que $\varphi(x)$, se réduisait respectivement à $\frac{1}{2}\varphi(\alpha), \frac{1}{2}\varphi(\beta)$.

Si $\varphi(x)$ est discontinu pour une valeur $c$ de $x$ comprise entre $\alpha$ et $\beta$, nous avons vu, dans le 5[me] cas particulier du 3[me] problème, que $\varphi(x)$ doit être remplacé par $\frac{\varphi(c-dc)+\varphi(c+dc)}{2}$, en fesant $dc=0$ après les développements.

*Corollaire* 1. Pour $\beta=\infty$, les form. (113), (114) donnent :

$$(115)\qquad \frac{\pi}{2}\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_0^\infty \varphi(t)\cos ux\cos ut dt,\qquad \infty>x\geqq 0.$$

$$(116)\qquad \frac{\pi}{2}\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_0^\infty \varphi(t)\sin ux\sin ut dt.\qquad \infty>x>0.$$

*Corollaire* 2. Comme on a, par les form. (36′), (36″), du 1[er] livre :

$$\int_{-\infty}^\infty \cos ux\cos ut du=2\int_0^\infty \cos ux\cos ut du,$$

$$\int_{-\infty}^\infty \sin ux\sin ut du=2\int_0^\infty \sin ux\sin ut du,\qquad \text{il vient :}$$

$$(117)\qquad \pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^\infty \cos xu du\int_0^\infty \varphi(t)\cos ut dt,\qquad x\geqq 0,$$

$$(118)\qquad \pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^\infty \sin ux du\int_0^\infty \varphi(t)\sin ut dt,\qquad x>0.$$

*Corollaire* 3. Comme on a trouvé

$$\pi\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u(x-t)\,dt=\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\int_0^\infty \cos u(x-t)du\,,$$

on aura aussi, en multipliant par 2 :

$$2\pi\cdot\varphi(x)=2\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\int_0^\infty \cos u(x-t)du\,, \qquad \text{ou,}$$

$$2\pi\cdot\varphi(x)=\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\int_{-\infty}^\infty \cos u(x-t)du\,, \qquad (\alpha)$$

Mais à cause de $\int_{-\infty}^\infty \sin u(x-t)du=0$, on a :

$$0=\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\int_{-\infty}^\infty \sin u(x-t)du. \qquad (\beta)$$

Donc, en ajoutant $(\alpha)$ et $(\beta)$, on obtient :

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\,e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dudt. \qquad (119)$$

*Corollaire* 4. On a, par la form. (119) :

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta\int_{-\infty}^\infty e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\varphi(t,y)dudt\,; \qquad (\alpha)$$

$$\varphi(t,y)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma^\delta\int_{-\infty}^\infty e^{\nu(y-\tau)\sqrt{-1}}\varphi(t,\tau)d\nu\, d\tau\,; \qquad (\beta)$$

En substituant la valeur de $\varphi(t,y)$ donnée par $(\beta)$ dans $(\alpha)$, il vient :

$$\varphi(x,y)=$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_\gamma^\delta\int_{-\infty}^\infty\int_\alpha^\beta\int_{-\infty}^\infty e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\,e^{\nu(y-\tau)\sqrt{-1}}\varphi(t,\tau)dud\nu dtd\tau. \qquad (120)$$

On trouverait de même, pour une fonction arbitraire de trois variables :

(121), $\varphi(x,y,z)=$

$$\frac{1}{8\pi^3}\int_{\varepsilon}^{\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\gamma}^{\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\, e^{\nu(y-\tau)\sqrt{-1}}\, e^{\mu(z-\theta)\sqrt{-1}}\,\varphi(t,\tau,\theta)\,du\,d\nu\,dt\,d\tau\,d\mu\,d\theta.$$

Les form., données dans ces corollaires, sont dûes à Fourier. (Voy. la *Théorie de la Chaleur*, chap. IX).

Voyez aussi Cauchy, *Théorie des ondes*, *Savants étrang.*, t. I, note XIX, où les formules (115), (116) sont présentées sous la forme :

$$(122)\quad \varphi(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} f(\mu)\cos\mu x dx,$$

$$f(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\varphi(\mu)\cos\mu x dx;\qquad (123)$$

$$(124)\quad \varphi(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} F(\mu)\sin\mu x dx,$$

$$F(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\varphi(\mu)\sin\mu x dx;\qquad (125)$$

dont on déduit aisément (115), (116).

Les fonctions $\varphi(x)$, $f(x)$; $\varphi(x)$, $F(x)$, sont nommées, par Cauchy, fonctions réciproques. (Voy. aussi Cauchy, *Exercices de Mathém.*, 1827, pag. 113).

On déduit aisément des form. (120), (121), les suivantes :

$\varphi(x,y)=$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)\sqrt{-1}\cos\nu(y-\tau)\,\varphi(t,\tau)\,du\,d\nu\,dt\,d\tau,\qquad (120')$$

$\varphi(x,y,z)=$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)\cos\nu(y-\tau)\cos\mu(z-\theta)\,\varphi(t,\tau,\theta)\,du\,d\nu\,dt\,d\tau\,d\mu\,d\theta.\qquad (121')$$

### 6$^{me}$ Problème.

*Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^{\infty}du\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\sin ux\cos ut dt,\quad \int_0^{\infty}du\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\cos ux\sin ut dt.$$

*Solution.* En égalant, dans les form. (110), les coëfficients de $\sqrt{-1}$ des deux membres, on obtient :

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin u(x-t) dt =$$

$$\int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin ux \cos ut dt - \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos ux \sin ut dt,$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin u(x+t) dt =$$

$$\int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin ux \cos ut dt + \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos ux \sin ut dt.$$

On tire de celles-ci, par addition et soustraction :

$$(126) \qquad \int_\alpha^\beta \frac{x\varphi(t)dt}{x^2-t^2} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin ux \cos ut dt, \qquad \beta > x > \alpha,$$

$$(127) \qquad -\int_\alpha^\beta \frac{t\varphi(t)dt}{x^2-t^2} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos ux \sin ut dt, \qquad \beta > x > \alpha.$$

Pour $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, on a :

$$\int_0^\infty \frac{x\varphi(t)dt}{x^2-t^2} = \int_0^\infty du \int_0^\infty \varphi(t) \sin ux \cos ut dt, \qquad (128)$$

$$-\int_0^\infty \frac{t\varphi(t)dt}{x^2-t^2} = \int_0^\infty du \int_0^\infty \varphi(t) \cos ux \sin ut dt. \qquad (129)$$

### *Applications des Formules de la 3me Section.*

Ces applications sont de deux espèces ; on applique ces formules à l'intégration des équations aux différentielles partielles, et à la recherche de la valeur des intégrales définies ; nous ne nous occuperons ici que de cette dernière sorte d'applications.

### 1er Exemple.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2+u^2}du,\ \int_0^\infty \frac{u\sin bu}{a^2+u^2}du,\ \int_0^\infty \frac{a\sin bu}{a^2+u^2}du,\ \int_0^\infty \frac{u\cos bu}{a^2+u^2}du.$$

*Solution.* Si dans les form. ($a$) et ($b$), on fait $\alpha=0$, $\beta=\infty$, elles deviennent :

$$\pi\varphi(x)+\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{x-t}dt=\int_0^\infty du\int_0^\infty \varphi(t)\,e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt, \qquad (\alpha)$$

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{x+t}dt=\int_0^\infty du\int_0^\infty \varphi(t)\,e^{u(x+t)\sqrt{-1}}dt. \qquad (\beta)$$

Soit $\varphi(x)=e^{-ax}$, $x=b$, on aura, par les form. (39), (40) du 2d livre :

$$(\gamma)\quad \int_0^\infty \frac{dt}{b-t}e^{-at}=e^{-ab}\,li(e^{ab}),\ \int_0^\infty \frac{dt}{b+t}e^{-at}=-e^{ab}\,li(e^{-ab}). \quad (\delta)$$

Par là, 1° la form. ($\alpha$) devient :

$$\pi e^{-ab}+\sqrt{-1}\,e^{-ab}\,li(e^{ab})=\int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-u(t-b)\sqrt{-1}}\,e^{-at}dt,$$

$$=\int_0^\infty e^{bu\sqrt{-1}}du\int_0^\infty e^{-(a+u\sqrt{-1})t}dt,$$

$$=\int_0^\infty \frac{e^{bu\sqrt{-1}}du}{a+u\sqrt{-1}}=\int_0^\infty \frac{(a-u\sqrt{-1})e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2},$$

$$=\int_0^\infty \frac{a\,e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}-\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{u\,e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}. \qquad (130)$$

Donc, en développant les exponentielles, on a :

$$\pi e^{-ab} + \sqrt{-1}\, e^{-ab}\, li(e^{ab}) =$$

$$\int_0^\infty \frac{a \cos bu}{a^2+u^2} du + \sqrt{-1} \int_0^\infty \frac{a \sin bu}{a^2+u^2} du -$$

$$\sqrt{-1} \int_0^\infty \frac{u \cos bu}{a^2+u^2} du + \int_0^\infty \frac{u \sin bu}{a^2+u^2} du. \qquad (131)$$

2° La form. ($\beta$) devient :

$$-\sqrt{-1}\, e^{ab}\, li(e^{-ab}) = \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{u(b+t)\sqrt{-1}}\, e^{-at} dt,$$

$$= \int_0^\infty e^{ub\sqrt{-1}} du \int_0^\infty e^{-(a-u\sqrt{-1})t} dt,$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{ub\sqrt{-1}} du}{a-u\sqrt{-1}} = \int_0^\infty \frac{(a+u\sqrt{-1}\, e^{bu\sqrt{-1}}}{a^2+u^2} du,$$

$$= \int_0^\infty \frac{a\, e^{bu\sqrt{-1}} du}{a^2+u^2} + \sqrt{-1} \int_0^\infty \frac{u\, e^{bu\sqrt{-1}} du}{a^2+u^2}. \qquad (132)$$

Donc, en développant les exponentielles, on a :

$$-\sqrt{-1}\, e^{ab}\, li(e^{-ab}) =$$

$$\int_0^\infty \frac{a \cos bu}{a^2+u^2} du + \sqrt{-1} \int_0^\infty \frac{a \sin bu}{a^2+u^2} +$$

$$\sqrt{-1} \int_0^\infty \frac{u \cos bu}{a^2+u} du - \int_0^\infty \frac{u \sin bu}{a^2+u^2} du. \qquad (133)$$

En comparant les termes réels et imaginaires des deux côtés, on tire des formules (131), (132), les suivantes :

$$(134) \qquad \pi e^{-ab} = \int_0^\infty \frac{a \cos bu du}{a^2+u^2} + \int_0^\infty \frac{u \sin bu du}{a^2+u^2},$$

$$e^{-ab}\, li\,(e^{ab}) = \int_0^\infty \frac{a \sin bu}{a^2+u^2}\, du - \int_0^\infty \frac{u \cos bu}{a^2+u^2}\, du\,, \qquad (135)$$

$$(136) \qquad 0 = \int_0^\infty \frac{a \cos bu\, du}{a^2+u^2} - \int_0^\infty \frac{u \sin bu\, du}{a^2+u^2}\,,$$

$$e^{ab}\, li(e^{-ab}) = -\int_0^\infty \frac{a \sin bu}{a^2+u^2}\, du - \int_0^\infty \frac{u \cos bu}{a^2+u^2}\, du\,, \qquad (137)$$

De (134) et (136) on tire par addition et soustraction :

$$(138) \quad \int_0^\infty \frac{a \cos bu}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{2} e^{-ab}, \quad \int_0^\infty \frac{u \sin bu}{a^2+u^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ab}. \qquad (139)$$

Ces formules, trouvées par Laplace, ont déjà été obtenues par d'autres procédés.

En ajoutant et en retranchant les form. (135), (137), on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{a \sin bu}{a^2+u^2}\, du = \tfrac{1}{2}\left[ e^{-ab}\, li(e^{ab}) - e^{ab}\, li(e^{-ab}) \right], \qquad (140)$$

$$\int_0^\infty \frac{u \cos bu}{a^2+u^2}\, du = -\tfrac{1}{2}\left[ e^{-ab}\, li(e^{ab}) + e^{ab}\, li(e^{-ab}) \right]. \qquad (141)$$

*Corollaire* 1. En ajoutant et en retranchant les form. ($\gamma$) et ($\delta$), on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{b\,dt}{b^2-t^2}\, e^{-at} = \tfrac{1}{2}\left[ e^{-ab}\, li\,(e^{ab}) - e^{ab}\, li(e^{-ab}) \right], \qquad (142)$$

$$\int_0^\infty \frac{t\,dt}{b^2-t^2}\, e^{-at} = \tfrac{1}{2}\left[ e^{-ab}\, li(e^{ab}) + e^{ab}\, li(e^{-ab}) \right]. \qquad (143)$$

Si dans ces dernières on change $b$ en $a$, $a$ en $b$, ce qui ne changera pas leurs seconds membres, on aura, à cause de (140), (141), les formules :

$$\int_0^\infty \frac{a \sin bu}{a^2+u^2}\, du = \int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2-t^2}\, e^{-bt}\,, \qquad (144)$$

$$\int_0^\infty \frac{u \cos bu}{a^2+u^2}\, du = -\int_0^\infty \frac{t\,dt}{a^2-t^2}\, e^{-bt}. \qquad (145)$$

*Coroll.* 2. On a, par la form. (138), $e^{-bt}=\frac{2t}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos bu}{t^2+u^2}du$;

en substituant cette valeur dans (144), on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{adt}{a^2-t^2}e^{-bt}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{atdt}{a^2-t^2}\int_0^\infty \frac{\cos bu}{t^2+u^2}du,$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty a\cos budu\int_0^\infty \frac{tdt}{(a^2-t^2)(u^2+t^2)},$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty a\cos budu\cdot l\left(\frac{a}{u}\right)\frac{1}{a^2+u^2},$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2+u^2}l\left(\frac{a}{u}\right)du. \qquad (146)$$

On tire aussi de (139) : $e^{-bt}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\sin bu}{t^2+u^2}du$; en substituant cette valeur dans (145), on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{a^2-t^2}e^{-bt}=\int_0^\infty \frac{tdt}{a^2-t^2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\sin bu}{t^2+u^2}du,$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u\sin budu\int_0^\infty \frac{tdt}{(a^2-t^2)(t^2+u)},$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\sin bu}{a^2+u^2}l\left(\frac{a}{u}\right)du. \qquad (147)$$

*Corollaire* 3. Les équations (130) et (131) donnent, par addition et soustraction :

$$\int_0^\infty \frac{ae^{bu\sqrt{-1}}}{a^2+u^2}du=\frac{\pi}{2}e^{-ab}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[e^{-ab}li(e^{ab})-e^{ab}li(e^{-ab})\right], \qquad (148)$$

$$\int_0^\infty \frac{ue^{bu\sqrt{-1}}}{a^2+u^2}du=-\frac{\pi}{2\sqrt{-1}}e^{-ab}-\tfrac{1}{2}\left[e^{-ab}li(e^{ab})+e^{-ab}li(e^{ab})\right]. \qquad (149)$$

## 2$^{me}$ Exemple.

*Chercher la valeur des expressions :*

$$\int_0^\infty \frac{u \cot bu}{a^2+u^2} du\,,\ \int_0^\infty \frac{u \operatorname{tg} bu}{a^2+u^2} du\,,\ \int_0^\infty \frac{u \operatorname{cosé} bu}{a^2+u^2} du.$$

*Solution.* 1°, Posons dans la form. (139), $b=1, 2, 3, \ldots n$, et ajoutons, il viendra :

$$\int_0^\infty \frac{u}{a^2+u^2}\left\{\sin u + \sin 2u + \ldots + \sin nu\right\} du =$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{e^{-a} + e^{-2a} + \ldots + e^{-na}\right\};$$

ou :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u \cot \frac{1}{2}u}{a^2+u^2} du - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u}{a^2+u^2}\,\frac{\cos(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} du =$$

$$\frac{\pi}{2}[e^{-a} + e^{-2a} + \ldots + e^{-na}].$$

Donc, en remplaçant dans la seconde intégrale $\frac{u}{2}$ par $u$,

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u \cot \frac{1}{2}u}{a^2+u^2} du - \int_0^\infty \frac{\cos(2n+1)u}{\cos u}\cdot\frac{2u \cot u}{a^2+4u^2} du =$$

$$\frac{\pi}{2}[e^{-a} + e^{-2a} + \ldots + e^{-na}].$$

Par conséquent, pour $n=\infty$, et en ayant égard à la formule (30$^{\text{IV}}$), il vient :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u \cot \frac{1}{2}u}{a^2+u^2} du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^a-1};$$

ou, en écrivant $2bu$ à la place de $u$, $2ab$ à la place de $a$, on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{u \cot bu}{a^2+u^2} du = \frac{\pi}{e^{2ab}-1}. \qquad (150)$$

2° Si dans la form. (139), après avoir posé $b=1, 2, 3, \ldots n$, on ajoute les résultats pris alternativement avec les signes $+$ et $-1$, on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{u}{a^2+u^2}\left\{\sin u - \sin 2u + \ldots + \sin nu\right\}du =$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{e^{-a}-e^{-2a}+e^{-3a}-\ldots+e^{-na}\right\};$$

ou :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u \operatorname{tg}\frac{1}{2}u}{a^2+u^2}du + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u}{a^2+u^2}\cdot\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}du =$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{e^{-a}-e^{-2a}+\ldots+e^{-na}\right\}.$$

Comme on a :

$$\int_0^\infty \frac{2u}{a^2+4u^2}\cdot\frac{\sin(2n+1)u}{\cos u}du = \int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\cdot\frac{2u \operatorname{tg} u}{a^2+4u^2}du,$$

il vient par ($30^{\text{VI}}$) :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u \operatorname{tg}\frac{1}{2}u}{a^2+u^2}du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^a+1}.$$

Si l'on change $u$ en $2bu$, $a$ en $2ab$, on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{u \operatorname{tg} bu}{a^2+u^2}du = \frac{\pi}{e^{2ab}+1}. \qquad (151)$$

3° Comme on a : $\cot bu + \operatorname{tg} bu = 2 \operatorname{cos\acute{e}} 2bu$, on tire de (150), (151) :

$$\int_0^\infty \frac{2u \operatorname{cos\acute{e}} 2bu}{a^2+u^2}du = \frac{\pi}{e^{2ab}-e^{-2ab}};$$

ou, en remplaçant $u$ par $\frac{1}{2}u$,

$$\int_0^\infty \frac{u \operatorname{cos\acute{e}} bu}{a^2+u^2}du = \frac{\pi}{e^{ab}-e^{-ab}}. \qquad (152)$$

### 3^me Exemple.

*Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{\text{séc}\, bu}{a^2+u^2}\, du.$$

*Solution.* Si dans la form. (138), mise sous la forme :

$$\int_0^\infty \frac{\cos bu}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{2a} e^{-ab},$$

on fait $b=1, 3, 5 \ldots (2n+1)$, on aura, en ajoutant les résultats pris alternativement avec le signe $+$ et $-$ :

$$\int_0^\infty \frac{1}{a^2+u^2} \left\{ \cos u - \cos 3u + \cos 5u - \ldots + \cos(2n+1)u \right\} du =$$

$$\frac{\pi}{2a} \left\{ e^{-a} - e^{-3a} + \ldots + e^{-(2n+1)a} \right\};$$

ou :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{séc}\, u}{a^2+u^2}\, du + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{a^2+u^2} \frac{\cos(2n+2)u}{\cos u}\, du =$$

$$\frac{\pi}{2a} \left\{ e^{-a} - e^{-3a} + \ldots + e^{-(2n+1)a} \right\}.$$

Mais on a :

$$\frac{\cos(2n+2)u}{\cos u} = \cos(2n+1)u - \frac{\sin(2n+1)u}{\cos u} \sin u,$$

$$= \cos(2n+1)u - \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} \operatorname{tg} u \sin u;$$

on a donc :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{séc}\, u}{a^2+u^2}\, du + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(2n+1)u}{a^2+u^2}\, du -$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} \cdot \frac{\operatorname{tg} u}{a^2+u^2} \sin u\, du =$$

$$\frac{\pi}{2a} \left\{ e^{-a} - e^{-3a} + \ldots + e^{-(2n+1)a} \right\}.$$

Mais on a :

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2n+1)u}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{2a} e^{-(2n+1)a},$$

Ce terme s'évanouit pour $n=\infty$ ; il en est de même de la 3me intégrale à gauche, à cause de (30v); on a donc :

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{séc}\, u}{a^2+u^2}du = \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{e^a+e^{-a}}$$

Posons ici $bu$, $ba$ à la place de $u$ et de $a$, on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{\text{séc}\, bu}{a^2+u^2}du = \frac{\pi}{a}\cdot\frac{1}{e^{ab}+e^{-ab}}. \qquad (153)$$

### 4me Exemple.

h, k, ... a, b, c, *étant des entiers positifs, chercher la valeur de l'intégrale :*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-hu\sqrt{-1}}}{k^2+u^2}\cdot\frac{1}{(a+u\sqrt{-1})^m}\cdot\frac{1}{(b+u\sqrt{-1})^n}\cdot\frac{1}{(c+u\sqrt{-1})^p}\dots du.$$

*Solution.* On a :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos xu}{a^2+u^2}du = \int_{-\infty}^0 \frac{\cos xudu}{a^2+u^2} + \int_0^\infty \frac{\cos xudu}{a^2+u^2} = 2\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos xudu}{a^2+u^2},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin xudu}{a^2+u^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin xudu}{a^2+u^2} + \int_0^\infty \frac{\sin xudu}{a^2+u^2} = 0\ ;$$

par conséquent on a :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos hu}{k^2+u^2}du = \frac{\pi}{k}e^{-hk}, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin hu}{k^2+u^2}\, du = 0.$$

De ces deux équations on tire :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{k^2+u^2}e^{-hu\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{k}e^{-hk}. \qquad (154)$$

Mais on a, par la form. (23) du 2[d] livre, en supposant $a$ positif :

$$\frac{\Gamma(m)}{(a+u\sqrt{-1})^m}=\int_0^\infty x^{m-1}e^{-(a+u\sqrt{-1})x}dx. \qquad (155)$$

En multipliant celle-ci par $\frac{du}{k^2+u^2}e^{-hu\sqrt{-1}}$, on trouve, en intégrant :

$$\Gamma(m)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hu\sqrt{-1}}}{k^2+u^2}\cdot\frac{du}{(a+u\sqrt{-1})^m}=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{k^2+u^2}e^{-hu\sqrt{-1}}\int_0^\infty x^{m-1}e^{-(a+u\sqrt{-1})x}dx,$$

$$=\int_0^\infty x^{m-1}e^{-ax}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{k^2+u^2}e^{-(h+x)u\sqrt{-1}},$$

$$=\int_0^\infty x^{m-1}e^{-ax}\cdot\frac{\pi}{k}e^{-(h+x)k},$$

$$=\frac{\pi}{k}e^{-hk}\int_0^\infty x^{m-1}e^{-(a+k)x}dx,$$

$$=\frac{\pi}{k}e^{-hk}\cdot\frac{\Gamma(m)}{(a+k)^m}; \quad \text{d'où :}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hu\sqrt{-1}}}{k^2+u^2}\cdot\frac{du}{(a+u\sqrt{-1})^m}=\frac{\pi}{k}e^{-hk}\cdot\frac{1}{(a+k)^m}. \qquad (156)$$

Multiplions la relation

$$\frac{\Gamma(n)}{(b+u\sqrt{-1})^n}=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-(b+u\sqrt{-1})x}dx,$$

par $\frac{du}{k^2+u^2}\cdot\frac{e^{-hu\sqrt{-1}}}{(a+u\sqrt{-1})^m}$, on trouve, en intégrant :

$$\Gamma(n)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hu\sqrt{-1}}}{k^2+u^2}\cdot\frac{du}{(a+u\sqrt{-1})^m}\cdot\frac{1}{(b+u\sqrt{-1})^n}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hu\sqrt{-1}}}{k^2+u^2}\cdot\frac{du}{(a+u\sqrt{-1})^m}\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-(b+u\sqrt{-1})x}dx\,,$$

$$=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-bx}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(h+x)u\sqrt{-1}}}{k^2+u^2}\cdot\frac{du}{(a+u\sqrt{-1})^m},$$

$$=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-bx}dx\cdot\frac{\pi}{k}\,\frac{e^{-(h+x)k}}{(a+k)^m},$$

$$=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-(b+k)x}dx\cdot\frac{\pi}{k}\cdot\frac{e^{-hk}}{(a+k)^m}$$

$$=\frac{\pi}{k}\cdot\frac{e^{-hk}}{(a+k)^m}\cdot\frac{\Gamma(n)}{(b+k)^n}.$$ Donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hu\sqrt{-1}}}{k^2+u^2}\cdot\frac{1}{(a+u\sqrt{-1})^m}\cdot\frac{1}{(b+u\sqrt{-1})^n}du=$$

$$\frac{\pi e^{-hk}}{k}\cdot\frac{1}{(a+k)^m}\cdot\frac{1}{(b+k)^n};$$

par conséquent, on trouve, en généralisant :

$$(157)\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hu\sqrt{-1}}}{k^2+u^2}\cdot\frac{du}{(a+u\sqrt{-1})^m(b+u\sqrt{-1})^n(c+u\sqrt{-1})^p\ldots}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{k}e^{-hk}}{(a+k)^m(b+k)^n(c+k)^p\ldots}.$$

*Corollaire* 1. Pour $a=b=c=$ etc. $=0$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hu\sqrt{-1}}du}{(k^2+u^2)u^{m+n+\ldots}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{-1})^{m+n+\ldots}}=\frac{\pi e^{-kh}}{k^{m+n+\ldots+1}}.$$

Mais à cause de $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$, $\frac{1}{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$,

la formule précédente pourra s'écrire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-hu\sqrt{-1}}du}{(k^2+u^2)u^{m+n+\dots}} = \frac{\pi e^{-hk} e^{\frac{\pi}{2}(m+n+\dots)\sqrt{-1}}}{k^{m+n+\dots+1}} \tag{158}$$

*Coroll.* 2. Si l'on fait dans cette dernière form. $m=n=$ etc. $=1$, en désignant par $s$ le nombre de ces lettres, on trouve :

$$\text{(159)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-hu\sqrt{-1}}du}{(k^2+u^2)u^s} = (-1)^{\frac{s}{2}} \frac{\pi}{k^{s+1}} \cdot e^{-hk}, \text{ si } s \text{ est pair ;}$$

$$\text{(160)} \quad = (-1)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{-1} \frac{\pi}{k^{s+1}} e^{-hk}, \text{ si } s \text{ est impair.}$$

La première de ces deux formules donne, en développant l'exponentielle :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(hu)\,du}{(k^2+u^2)u^s} - \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(hu)\,du}{(k^2+u^2)u^s} = (-1)^{\frac{s}{2}} \frac{\pi}{k^{s+1}} e^{-hk} ;$$

d'où l'on tire, $s$ étant pair :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(hu)du}{(k^2+u^2)u^s} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(hu)du}{(k^2+u^2)u^s} = (-1)^{\frac{s}{2}} \frac{\pi}{k^{s+1}} e^{-hk}, \tag{161}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(hu)du}{(k^2+u^2)u^s} = 0.$$

Si $s$ est impair, on a, par (160) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(hu)du}{(k^2+u^2)u^s} - \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(hu)du}{(k^2+u^2)u^s} = (-1)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{-1} \frac{\pi}{k^{s+1}} e^{-hk} ;$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(hu)du}{(k^2+u^2)u^s} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(hu)du}{(k^2+u^2)u^s} = (-1)^{\frac{s+1}{2}} \frac{\pi}{k^{s+1}} \cdot e^{-hk}; \qquad (162)$$

ou
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(hu)du}{(k^2+u^2)u^s} = (-1)^{\frac{s+1}{2}} \frac{\pi}{2k^{s+1}} \cdot e^{-hk}. \qquad (163)$$

Les formules de cet exemple sont dûes à Lejeune-Dirichlet. (Voyez *Journal de Crelle*, vol. 4. p. 94).

## 4$^{me}$ SECTION.

### DES FONCTIONS ARBITRAIRES

EXPRIMÉES AU MOYEN DES SÉRIES DE QUANTITÉS PÉRIODIQUES ET DES INTÉGRALES MULTIPLES DUES A L'EXPRESSION $(1-2p\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$.

(Voyez Poisson, *Théorie de la Chaleur*, ch. VIII, p. 212,
*Journal polytechnique*, cah. 19, p. 145.
Legendre, *Exercices de Calcul intég.*, t. II, p. 248). (*)

#### 1$^{er}$ PROBLÈME.

*Soient* $\varphi$ *et* $\theta$, *les deux côtés d'un triangle sphérique dont le* 3$^{me}$ *côté est* $\mu$ *et l'angle opposé* $\psi-\zeta$, *si on donne :*

$$p = \cos\mu = \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi \cos(\psi-\zeta),$$

*on demande la valeur de l'intégrale double*

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{(1-\alpha^2)\, f(\varphi,\zeta)\, d\zeta}{(1-2\alpha p+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$1-p$, $1-\alpha$ *étant des quantités infiniment petites, et l'expression*

$$(1-2\alpha p+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

*étant regardée comme positive.*

*Solution.* Tant que $p$ diffère de 1 d'une quantité finie, l'ex-

---

(*) A cause de circonstances se rattachant au mode de publication de cet ouvrage, limités par l'espace et le temps, nous avons suivi, dans l'exposition de ces matières, les méthodes simples et courtes de Poisson, quoique laissant à désirer sous le rapport de la rigueur. Nous renvoyons, pour des déductions tout-à-fait exactes, à un Mémoire de M. Lejeune-Dirichlet, dans le Journal de M. Crelle, vol. XVII.

pression $$(1-\alpha^2)\cdot\frac{f(\varphi,\zeta)d\zeta}{(1-2\alpha p+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

sera infiniment petite, ou nulle, à cause du facteur $1-\alpha$; par suite la valeur de l'intégrale elle-même sera infiniment petite, ou nulle. Il suit de là, que l'intégrale donnée ne pourra avoir une valeur finie différente de zéro, qu'en supposant $1-p$ infiniment petit, ou $p$ infiniment peu différent de l'unité.

Mais comme pour $p=1$, on a $\mu=0$, $\theta=\varphi$, $\psi=\zeta$, puisqu'alors le côté $\varphi$ coïncide avec le côté $\theta$, il est clair que la supposition de $1-p$ infiniment petit, entraînera les égalités

$$\varphi=\theta+d\theta,\ \zeta=\psi+d\psi.$$

Soit de plus $1-\alpha=d\alpha,\ 1-p=dp,$ on aura :

$$\begin{aligned}1-p=dp&=1-\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)\\&=1-\cos\theta\cos(\theta+d\theta)-\sin\theta\sin(\theta+d\theta)\cos d\psi\\&=1-\cos\theta\left[\cos\theta\left(1-\frac{d\theta^2}{2}\right)-d\theta\sin\theta\right]\\&-\sin\theta\left[\sin\theta\left(1-\frac{d\theta^2}{2}\right)+d\theta\cos\theta\right]\left(1-\frac{d\psi^2}{2}\right),\\&=\frac{d\theta^2}{2}+\frac{d\psi^2}{2}\sin^2\theta.\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}(1-\alpha^2)f(\varphi,\zeta)\sin\varphi&=d\alpha(2-d\alpha)f(\theta+d\theta,\psi+d\psi)\sin(\theta+d\theta),\\&=d\alpha(2-d\alpha)\left[f(\theta,\psi)+\left(\frac{df}{d\theta}\right)d\theta+\left(\frac{df}{d\psi}\right)d\psi\right]\\&\qquad\left[\sin\theta\left(1-\frac{d\theta^2}{2}\right)+d\theta\cos\theta\right],\\&=2\,d\alpha f(\theta,\psi)\sin\theta.\end{aligned}$$

On trouve de même :

$$\begin{aligned}1-2\alpha p+\alpha^2&=1-2(1-d\alpha)\left[1-\frac{d\theta^2}{2}-\frac{d\psi^2}{2}\sin^2\theta\right]+(1-d\alpha)^2\\&=d\alpha^2+d\theta^2+d\psi^2\sin^2\theta.\end{aligned}$$

La valeur finie de l'intégrale proposée sera donc celle de l'intégrale suivant :

$$U=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2d\alpha f(\theta,\psi)\sin\theta}{(d\alpha^2+d\theta^2+d\psi^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}d(d\theta)d(d\psi),$$

$$= \frac{f(\theta,\psi)}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\alpha\cdot d(d\theta)}{d\alpha^2+(d\theta)^2}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\sin\theta\, d(d\psi)}{\sqrt{d\alpha^2+d\theta^2}}}{\left(1+\frac{d\psi^2\sin^2\theta}{d\alpha^2+d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit pour abréger $\frac{d\psi\cdot\sin\theta}{\sqrt{d\alpha^2+d\theta^2}} = d\psi'$, d'où :

$$\frac{\sin\theta\, d(d\psi)}{\sqrt{d\alpha^2+d\theta^2}} = d(d\psi'),\quad \frac{d\psi^2\sin^2\theta}{d\alpha^2+d\theta^2} = d\psi'^2,$$

on aura :

$$U = \frac{f(\theta,\psi)}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\alpha\, d(d\theta)}{d\alpha^2+d\theta^2}\int_0^{2\pi}\frac{d(d\psi')}{(1+d\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or on a trouvé (23′), (23″), liv. 2[me],

$$\int_0^{2\pi}\frac{d(d\psi')}{(1+d\psi'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2,\quad \int_0^{\pi}\frac{d\alpha\, d(d\theta)}{d\alpha^2+d\theta^2} = \pi;$$

on a donc :

$U = f(\theta,\psi)$, par suite on a :

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\alpha^2)\, f(\varphi,\zeta)\sin\varphi}{(1-2\alpha p+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\varphi\, d\zeta = f(\theta,\psi); \qquad \text{(A)}$$

on suppose $1-\alpha$, $1-p$ infiniment petits.

## CAS PARTICULIERS.

### 1[er] Cas, $\psi = 0$.

A cause de $p = \cos\mu = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)$, on aura

$$p = 1,\ \text{pour}\ \left\{\begin{array}{l}\varphi=\theta,\\ \psi=0,\\ \quad\text{ou}\\ \varphi=\theta,\\ \zeta=2\pi;\end{array}\right.$$

on aura donc aussi $1-p$ infiniment petit pour $\left\{\begin{array}{l}\varphi=\theta+d\theta,\\ \zeta=d\psi;\\ \quad\text{ou}\\ \varphi=\theta+d\theta,\\ \zeta=2\pi+d\psi.\end{array}\right.$

Mais $\zeta$ doit être positif, et ne peut dépasser $2\pi$, donc $d\psi$ est positif dans $\zeta = d\psi$, donc l'intég. $\int_0^{2\pi} \frac{d(d\psi')}{(1+d\psi'^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(d\psi')}{(1+d\psi'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2$, ne doit être prise que de $-\infty$ à $0$, ce qui réduit sa valeur à moitié, ou à $1$. Donc si $1-p$ est infiniment petit, par suite $\zeta = d\psi$, on a :

$$U = \frac{f(\theta,0)}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\alpha\, d(d\theta)}{d\alpha^2 + d\theta^2} \times 1 = \frac{f(\theta,0)}{2}.$$

Si $1-p$ est infiniment petit, on a, à cause de $\zeta = 2\pi + d\psi$,

$$U = \frac{f(\theta,2\pi)}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\alpha\, d(d\theta)}{d\alpha^2 + d\theta^2} \times 1 = \frac{f(\theta,2\pi)}{2}.$$

Donc, puisque $1-p$ est infiniment petit, on a, à cause des deux valeurs $\zeta = d\psi$, $\zeta = 2\pi + d\psi$,

$$U = \tfrac{1}{2}[f(\theta,0) + f(\theta,2\pi)].$$

Cette dernière valeur ne coïncidera avec $f(\theta,\psi)$, pour $\psi = 0$, que lorsqu'on aura accidentellement $f(\theta,0) = f(\theta,2\pi)$.

2^me^ Cas. $\psi = 2\pi$.

On trouve, par des calculs tout-à-fait semblables à ceux du cas précédent :

$$U = \tfrac{1}{2}[f(\theta,0) + f(\theta,2\pi)].$$

3^me^ Cas. $\theta = 0$.

Comme on a :

$p = \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi \cos(\psi - \zeta)$, il vient : $p = \cos\varphi$; donc si $1-p$ est infiniment petit, on devra avoir $\varphi = \theta + d\theta$; on a par conséquent :

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\zeta \left[ \int_0^{\pi} \frac{f(\varphi,\zeta)(1-\alpha^2)\sin\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Puisque $1-\alpha^2$ est infinim. petit, l'intég. $\int_0^{\pi} \frac{f(\varphi,\zeta)(1-\alpha^2)\sin\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} =$

$(1-\alpha^2)\int_0^\pi \frac{f(\varphi,\zeta)\sin\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$ sera nulle, à moins que $\cos\varphi$ ne diffère infiniment peu de 1.

Il faut donc $\varphi$ infiniment petit, ce qui permet de poser $\varphi=0$ dans $f(\varphi,\zeta)$, on a donc :

$$U=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(0,\zeta)d\zeta\int_0^\pi \frac{(1-\alpha^2)\sin\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais on a, par la form. aux différentielles binômes, employée à l'occasion de la form. (23′), du 2e liv.,

$$\int \frac{(1-\alpha^2)\sin\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1-\alpha^2}{\alpha\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}}+C.$$

Pour $\varphi=0$, on a

$$\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}=\pm(1-\alpha)=\begin{cases}1-\alpha, \text{ si } \alpha<1\\ \alpha-1, \text{ si } \alpha>1\end{cases}$$ car le radical est positif par hypothèse.

Pour $\varphi=\pi$, on a $\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}=\pm(1+\alpha)=1+\alpha$, donc :

$$\int_0^\pi \frac{(1-\alpha^2)\sin\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}=\begin{cases}-\frac{1-\alpha^2}{\alpha(1+\alpha)}+\frac{1-\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)}=2, & \alpha<1\\ -\frac{1-\alpha^2}{\alpha(1+\alpha)}-\frac{1-\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)}=-\frac{2}{\alpha}, & \alpha>1\\ \qquad\qquad =-2, \text{ p}^{\text{r}}\ \alpha=1 & \end{cases}$$

On a donc, dans l'un et l'autre cas :

$$U=\pm\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(0,\zeta)d\zeta\ ;$$

c'est la moyenne arithmétique de toutes les valeurs de la fonction $f(0,\zeta)$, qu'on obtient en fesant varier $\zeta$ de 0 à $2\pi$.

4me Cas. $\theta=2\pi$.

Par des calculs tout-à-fait semblables aux précédents, on trouve :

$$U=\pm\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\pi,\zeta)d\zeta.$$

Donc, en résumé, pour que la valeur $U=f(\theta,\psi)$ de notre inté-

grale subsiste aux limites $\theta=0$, $\theta=\pi$, il faudrait que la fonction $f(\theta,\psi)$ fut, pour ces valeurs, indépendante de $\psi$.

### 1er Théorème.

*Soit* $P_n$ *le coëfficient du terme général de la série*

$$\varsigma=(1-2\alpha p+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha P_1+\text{etc.}+\alpha^n P_n+\text{etc.},\qquad(\alpha)$$

*dans laquelle on suppose*

$$p=\cos\mu=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta),$$

$\alpha<1, p<1$ ; *si on suppose de plus*

$$U_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\alpha^n P_n f(\varphi,\zeta)\sin\varphi d\varphi\, d\zeta,\qquad(164)$$

*je dis que, pour* $1-\alpha$, $1-p$ *infiniment petits, on aura la série périodique*

$$f(\theta,\psi)=U_0+U_1+U_2\text{ etc.}\qquad \begin{matrix}\pi>\theta>0\\2\pi>\psi>0\end{matrix}\qquad(165)$$

*Démonstration.* Je dis d'abord que la suite $(\alpha)$ est une série convergente. Car soit $p=\cos\mu$, $\beta=e^{\mu\sqrt{-1}}$, $\gamma=e^{-\mu\sqrt{-1}}$, on a :

$$1-2\alpha p+\alpha^2=(1-\beta\alpha)(1-\gamma\alpha);\qquad\text{d'où :}$$

$$\varsigma=(1-\beta\alpha)^{-\frac{1}{2}}(1-\gamma\alpha)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$[1+\tfrac{1}{2}\alpha\beta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\alpha^2\beta^2+\ldots][1+\tfrac{1}{2}\alpha\gamma+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\alpha^2\gamma^2+\ldots].$$

En effectuant la multiplication indiquée, le coëfficient de $\alpha^n$ sera de la forme :

$$P_n=A\cos n\mu+B\cos(n-2)\mu+\text{etc.}\quad(*)$$

---

(*) Par exemple le coëfficient de $\alpha^4$ est

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}(\beta^4+\gamma^4)+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\tfrac{1}{2}\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\beta^2\gamma^2.$$

Or, $\beta\gamma=1$, $\beta^2+\gamma^2=2\cos2\mu$, $\beta^4+\gamma^4=2\cos4\mu$, donc :

$$P_4=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}2\cos4\mu+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot2\cos2\mu+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}.$$

La valeur maximum de ce coëfficient répond à $\mu = 0$, ou $p = 1$. Mais pour $p = 1$, on a :

$$\varsigma = \frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n + \ldots, \quad \text{donc } P_n = 1 ;$$

donc, quelque petit que soit $1-\alpha$, on aura toujours $P_n < 1$; donc la série ($\alpha$) est convergente, et on peut l'employer à la place de $\varsigma$.

$$\varsigma = 1 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \alpha^3 P_3 + \text{etc.},$$

$$\frac{d\varsigma}{d\alpha} = P_1 + 2\alpha P_2 + 3\alpha^2 P_3 + \text{etc.}, \quad 2\alpha \frac{d\varsigma}{d\alpha} = 2\alpha P_1 + 4\alpha^2 P_2 \text{ etc.}$$

$$\varsigma + 2\alpha \frac{d\varsigma}{d\alpha} = 1 + 3\alpha P_1 + 5\alpha^2 P_2 + \text{etc.} \qquad (\alpha)$$

Mais on a aussi :

$$\varsigma = (1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{d\varsigma}{d\alpha} = \frac{p-\alpha}{(1-2\alpha p + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\varsigma + 2\alpha \frac{d\varsigma}{d\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha p + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 + 3\alpha P_1 + 5\alpha^2 P_2 + \text{etc.}$$
$$+ (2n+1)\alpha^n P_n + \text{etc.}$$

On a donc, en supposant $1-\alpha$, $1-p$ infiniment petits :

$$f(\theta,\psi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha p + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} f(\varphi,\zeta) \sin\varphi \, d\varphi \, d\zeta,$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (1 + 3\alpha P_1 + 5\alpha^2 P_2 + \ldots + (2n+1)\alpha^n P_n + \text{etc.})$$
$$f(\varphi,\zeta) \sin\varphi \, d\varphi \, d\zeta.$$

Mais on a, par hypothèse :

$$U_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha^n P_n f(\varphi,\zeta) \sin\varphi \, d\varphi \, d\zeta ;$$

donc :

$$f(\theta,\psi) = U_0 + U_1 + U_2 + \text{etc.}, \quad \begin{cases} 1-\alpha,\ 1-p \ \text{infinim. petits.} \\ \pi > \theta > 0,\ 2\pi > \psi > 0. \end{cases}$$

*Diverses Propriétés de la Fonction* $U_n$.

$2^{me}$ Théorème.

*En supposant* $\varsigma = (1-2\alpha p+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-2\alpha\cos\mu+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha<1$, $\varsigma<1$, $\varsigma = 1+\alpha P_1 + \text{etc.} + \alpha^n P_n + \text{etc.}$, $P_n$ *fonction de* p, *ou de* $\mu$, *je dis que l'on a :*

$$\frac{d\left[\sin\mu\frac{dP_n}{d\mu}\right]}{\sin\mu\, d\mu} + n(n+1)P_n = 0.$$

*Démonstration.* Soient $p=\cos\mu$, $dp = -\sin\mu d\mu$,

$M = (1-2\alpha p+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = (1-2\alpha\cos\mu+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$, on aura :

$$\frac{dM}{dp} = \tfrac{1}{2}(1-2\alpha p+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\times -2\alpha = -\frac{\alpha}{M},$$

$$\frac{dM}{d\alpha} = \tfrac{1}{2}(1-2\alpha p+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\times -2(p-\alpha) = -\frac{p-\alpha}{M},$$

$$\frac{d\varsigma}{dp} = -\tfrac{1}{2}(1-2\alpha p+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\times -2\alpha = \frac{\alpha}{M^3},$$

$$\frac{d^2\varsigma}{dp^2} = -\frac{3\alpha M^2\frac{dM}{dp}}{M^6} = \frac{3\alpha^2}{M^5},$$

$$\frac{d\varsigma}{d\alpha} = -\tfrac{1}{2}(1-2\alpha p+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\times -2(p-\alpha) = \frac{p-\alpha}{M^3},$$

$$\frac{d^2\varsigma}{d\alpha^2} = -\frac{1}{M^3} + \frac{3(p-\alpha)^2}{M^5},$$

$$(1-p^2)\frac{d^2\varsigma}{dp^2} + \alpha^2\frac{d^2\varsigma}{d\alpha^2} = \frac{3\alpha^2}{M^5}(1-2\alpha p+\alpha^2) - \frac{\alpha^2}{M^3} = \frac{2\alpha^2}{M^3},$$

$$2p\frac{d\varsigma}{dp} - 2\alpha\frac{d}{d\alpha} = \frac{2p\alpha}{M^3} - \frac{2\alpha(p-\alpha)}{M^3} = \frac{2\alpha^2}{M^3}.$$

En soustrayant ces dernières, on a :

$$(1-p^2)\frac{d^2\varsigma}{dp^2} - 2p\frac{d\varsigma}{dp} + \alpha^2\frac{d^2\varsigma}{d\alpha^2} + 2\alpha\frac{d\varsigma}{d\alpha} = 0, \quad \text{ou :}$$

$$\frac{d\left[(1-p^2)\frac{d\varsigma}{dp}\right]}{dp} + \frac{d\left[\alpha^2\frac{d\varsigma}{d\alpha}\right]}{d\alpha} = 0. \qquad (\alpha)$$

Mais on a d'un autre côté :

$$\frac{d\varsigma}{dp} = \alpha\,\frac{dP_1}{dp} + \alpha^2\,\frac{dP_2}{dp} + \ldots + \alpha^n\,\frac{dP_n}{dp} + \text{etc.},$$

$$\frac{d\varsigma}{dx} = P_1 + 2\alpha P_2 + \ldots + n\alpha^{n-1}P_n + \text{etc.},$$

$$\alpha^2\,\frac{d\varsigma}{dx} = \alpha^2 P_1 + 2\alpha^3 P_2 + \ldots + n\alpha^{n+1}P_n + \text{etc.},$$

$$\frac{d\left[\alpha^2\dfrac{d\varsigma}{d\alpha}\right]}{d\alpha} = 2\alpha P_1 + \text{etc.} + n(n+1)\alpha^n P_n + \text{etc.}$$

En substituant ces valeurs dans ($\alpha$) on a :

$$\frac{d\left[(1-p^2)\dfrac{dP_n}{dp}\right]}{dp} + n(n+1)P_n = 0\,;$$

ou, à cause de $p = \cos\mu$, $dp = -\sin\mu\, d\mu$,

$$\frac{d\left[\sin\mu\cdot\dfrac{dP_n}{d\mu}\right]}{\sin\mu\, d\mu} + n(n+1)P_n = 0. \qquad (166)$$

### 3<sup></sup>me Théorème.

*Soient* $\varsigma = (1 - 2\,p\alpha + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - 2\alpha\cos\mu + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha < 1$,
$p = \cos\mu = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos(\psi - \zeta)$, $U_n = f(\theta, \psi)$,
$\varsigma = 1 + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \ldots + \alpha^n U_n + \text{etc.}$, *je dis qu'on aura :*

$$\frac{d\left[\sin\theta\dfrac{dU_n}{d\theta}\right]}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2U_n}{d\psi^2} + n(n+1)U_n = 0. \qquad (167)$$

*Démonstration.* On a :

$$M = (1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - 2\alpha\cos\mu + \alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d\cos\mu}{d\theta} = \cos\theta\sin\varphi\cos(\psi - \zeta) - \sin\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{d\cos\mu}{d\psi} = -\sin\theta\sin\varphi\sin(\psi - \zeta),$$

$$\frac{dM}{d\theta}=\tfrac{1}{2}(1-2\alpha p+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\times-2\alpha\frac{d\cos\mu}{d\theta}$$

$$=-\frac{\alpha}{M}[\cos\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)-\sin\theta\cos\varphi],$$

$$\frac{dM}{dp}=\tfrac{1}{2}(1-2\alpha p+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\times-2\alpha=-\frac{\alpha}{M},$$

$$\frac{dM}{d\psi}=\tfrac{1}{2}(1-2\alpha\cos\mu+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\times-2\alpha\frac{d\cos\mu}{d\psi}$$

$$=\frac{\alpha}{M}\sin\theta\sin\varphi\sin(\psi-\zeta),$$

$$\frac{d\varsigma}{dp}=\frac{\alpha}{M^3},\quad\frac{d^2\varsigma}{dp^2}=\frac{3\alpha^2}{M^5},$$

$$\frac{d\varsigma}{d\theta}=-\tfrac{1}{2}(1-2\alpha\cos\mu+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\times-2\alpha\frac{d\cos\mu}{d\theta}$$

$$=\frac{\alpha}{M^3}[\cos\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)-\cos\varphi\sin\theta],$$

$$=\frac{d\varsigma}{dp}[\cos\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)-\cos\varphi\sin\theta],$$

$$\frac{d^2\varsigma}{d\theta^2}=-\frac{\alpha}{M^3}[\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)]$$

$$+\frac{3\alpha^2}{M^5}[\cos\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)-\cos\varphi\sin\theta]^2,$$

$$=-\frac{d\varsigma}{dp}p+\frac{d^2\varsigma}{dp^2}[\cos\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)-\cos\varphi\sin\theta]^2,$$

$$\frac{d\varsigma}{d\psi}=-\tfrac{1}{2}(1-2\alpha\cos\mu+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\times-2\alpha\frac{d\cos\mu}{d\psi}$$

$$=\frac{\alpha}{M^3}[-\sin\theta\sin\varphi\sin(\psi-\zeta)],$$

$$=-\frac{d\varsigma}{dp}\sin\theta\sin\varphi\sin(\psi-\zeta),$$

$$\frac{d\varsigma}{d\psi^2}=-\frac{\alpha}{M^3}\sin\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)+\frac{3\alpha^2}{M^5}\sin^2\theta\sin^2\varphi\sin^2(\psi-\zeta),$$

$$=-\frac{d\varsigma}{dp}\sin\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta)+\frac{d^2\varsigma}{dp^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi\sin^2(\psi-\zeta).$$

Comme on a :

$$p=\cos\mu=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta),$$

si l'on fait $x = \cos\theta$, $dx = -\sin\theta d\theta$, on aura identiquement :

$$\frac{d\varsigma}{dx}dx = \frac{d\varsigma}{dx} \times - \sin\theta\, d\theta ;$$

d'où :

$$\frac{d\varsigma}{dx} = \frac{d\varsigma}{dx}dx \times - \frac{1}{\sin\theta d\theta} = - \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{d\varsigma}{d\theta},$$

$$\frac{d^2\varsigma}{dx^2}dx = \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d\varsigma}{a\theta} - \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{d^2\varsigma}{d\theta^2} d\theta,$$

$$\frac{d^2\varsigma}{dx^2} = - \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \cdot \frac{d\varsigma}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2\varsigma}{d\theta^2},$$

$$\frac{d\left[(1-x^2)\frac{d\varsigma}{dx}\right]}{dx} = \frac{d^2\varsigma}{dx^2} - 2x \cdot \frac{d\varsigma}{dx} - x^2 \frac{d^2\varsigma}{dx^2} = \frac{d^2\varsigma}{d\theta^2} + \frac{d\varsigma}{d\theta} \cdot \frac{\cos\sigma}{\sin\theta}.$$

Donc :

$$\frac{d\left[(1-x^2)\frac{d\varsigma}{dx}\right]}{dx} + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2\varsigma}{d\psi^2} = \frac{d^2\varsigma}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{d\varsigma}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2\varsigma}{d\psi^2},$$

$$= \frac{d^2\varsigma}{dp^2}\left[\cos\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta) - \cos\varphi\sin\theta\right]^2 - p\frac{d\varsigma}{dp} +$$

$$\frac{d\varsigma}{dp}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[\cos\theta\sin\varphi\cos(\psi-\zeta) - \cos\varphi\sin\theta\right] +$$

$$\frac{d^2\varsigma}{dp^2}\sin^2\varphi\sin^2(\psi-\zeta) - \frac{d\varsigma}{dp}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\cos(\psi-\zeta),$$

$$= \frac{d^2\varsigma}{dp^2}\left[1-p^2\right] - 2p\frac{d\varsigma}{dp},$$

$$= \frac{d\left[(1-p^2)\frac{d\varsigma}{dp}\right]}{dp} = - \frac{d\left[\alpha^2\frac{d\varsigma}{d\alpha}\right]}{d\alpha};$$

d'où :

$$\frac{d\left[(1-x^2)\frac{d\varsigma}{dx}\right]}{dx} + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2\varsigma}{d\psi^2} + \frac{d\left[\alpha^2\frac{d\varsigma}{d\alpha}\right]}{d\alpha} = 0. \qquad (\alpha)$$

D'un autre côté, de $\varsigma = 1 + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \ldots + \alpha^n U_n + \text{etc.}$, on tire :

$$\frac{d\varsigma}{d\alpha} = U_1 + 2\alpha U_2 + \ldots + n\alpha^{n-1} U_n + \text{etc.},$$

$$\alpha^2 \frac{d\varsigma}{d\alpha} = \alpha^2 U_1 + \ldots + n\alpha^{n+1} U_n + \text{etc.},$$

$$\frac{d\left[\alpha^2 \frac{d\varsigma}{d\alpha}\right]}{d\alpha} = 2\alpha U_1 + \ldots + n(n+1)\alpha^n U_n + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2\varsigma}{d\psi^2} = \alpha \frac{d^2 U_1}{d\psi^2} + \ldots + \alpha^n \frac{d^2 U_n}{d\psi^2} + \text{etc.},$$

$$\frac{d\varsigma}{dx} = \alpha \frac{dU_1}{dx} + \text{etc.} + \alpha^n \frac{dU_n}{dx} + \text{etc.}$$

En substituant ces valeurs dans ($\alpha$), il vient :

$$\frac{d\left[(1-x^2)\frac{dU_n}{dx}\right]}{dx} + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2 U_n}{d\psi^2} + n(n+1)U_n = 0.$$

Donc, à cause de $\cos\theta = x$,

$$\frac{d\left[\sin\theta \frac{dU_n}{d\theta}\right]}{\sin\theta d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2 U_n}{d\psi^2} + n(n+1)U_n = 0.$$

*Remarque.* En posant $\psi = 0$, on obtient la formule du théorème précédent.

### 4^me^ Théorème.

*Soit* $T_n$ *ce que devient* $U_n$ *lorsqu'on change* $\theta, \psi$ *en* $\varphi, \zeta$, *et soit, pour abréger :*

$$F(\varphi, \zeta) = \frac{d\left[\sin\varphi \frac{d f(\varphi,\zeta)}{d\varphi}\right]}{d\varphi} + \frac{d^2 f(\varphi,\zeta)}{\sin\varphi \, d\zeta^2}, \qquad (168)$$

*je dis que l'on aura :*

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} T_n \sin\varphi \, f(\varphi,\zeta) d\varphi d\zeta = -\frac{1}{n(n+1)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} T_n F(\varphi,\zeta) d\varphi d\zeta. \quad (169)$$

*Démonstration.* On tire de (167) :

$$T_n \sin\varphi = -\frac{1}{n(n+1)} \frac{d[\sin\varphi \frac{dT_n}{d\varphi}]}{d\varphi} - \frac{1}{n(n+1)\sin\varphi} \cdot \frac{d^2T_n}{d\zeta^2}.$$

Multiplions celle-ci par $f(\varphi,\zeta)d\varphi d\zeta$, et intégrons, on a :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} T_n \sin\varphi f(\varphi,\zeta)\, d\varphi\, d\zeta$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}\Big[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d[\sin\varphi \frac{dT_n}{d\varphi}]}{d\varphi} f(\varphi,\zeta) d\varphi\, d\zeta +$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d^2T_n}{d\zeta^2} \cdot \frac{f(\varphi,\zeta)\, d\varphi\, d\zeta}{\sin\varphi}\Big],$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}\Big[\int_0^\pi \frac{d[\sin\varphi \frac{dT_n}{d\varphi}]}{d\varphi} f(\varphi,\zeta) d\varphi \int_0^{2\pi} d\zeta +$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d^2T_n}{d^2\zeta} f(\varphi,\zeta)\, d\zeta \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sin\varphi}\Big]. \qquad (\alpha)$$

Mais on a, en intégrant par parties :

$$\int \frac{d[\sin\varphi \frac{dT_n}{d\varphi}]}{d\varphi} f(\varphi,\zeta) d\varphi = \frac{dT_n}{d\varphi} \sin\varphi f(\varphi,\zeta) - \int \frac{dT_n}{d\varphi} \sin\varphi \frac{df(\varphi,\zeta)}{d\varphi} d\varphi,$$

$$= \frac{dT_n}{d\varphi} \sin\varphi f(\varphi,\zeta) - T_n \sin\varphi \frac{df(\varphi,\zeta)}{d\varphi} + \int T_n \frac{d[\sin\varphi \frac{df(\varphi,\zeta)}{d\varphi}]}{d\varphi} d\varphi.$$

Mais comme $\sin\varphi$ est nul aux deux limites $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, on a :

$$\int_0^\pi \frac{d[\sin\varphi \frac{dT_n}{d\varphi}]}{d\varphi} f(\varphi,\zeta) = \int_0^\pi T_n \frac{d[\sin\varphi \frac{df(\varphi,\zeta)}{d\varphi}]}{d\varphi} d\varphi. \qquad (\beta)$$

On a aussi, en intégrant par parties :

$$\int \frac{d^2T_n}{d\zeta^2} f(\varphi,\zeta)d\zeta = \frac{dT_n}{d\zeta} f(\varphi,\zeta) - \int \frac{dT_n}{d\zeta} \cdot \frac{df(\varphi,\zeta)}{d\varphi} d\varphi,$$

$$= \frac{dT_n}{d\zeta} f(\varphi,\zeta) - T_n \frac{df(\varphi,\zeta)}{d\zeta} + \int T_n \frac{d^2f(\varphi,\zeta)}{d\zeta^2} d\zeta.$$

Mais $T_n$, $\frac{dT_n}{d\varphi}$, $f(\varphi,\zeta)$, $\frac{df(\varphi,\zeta)}{d\zeta}$ disparaissent aux limites $\psi = 0$, $\psi = 2\pi$ ; car pour ces limites $T_n$, $\frac{dT_n}{d\zeta}$, ont des valeurs égales, et nous supposons qu'il en soit de même à l'égard de $f(\varphi,\zeta)$, et $\frac{df(\varphi,\zeta)}{d\varphi}$. On a donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d^2T_n}{d\zeta^2} f(\varphi,\zeta)d\zeta = \int_0^{2\pi} T_n \frac{d^2f(\varphi,\zeta)}{d\zeta^2} d\zeta. \qquad (\gamma)$$

En substituant ($\gamma$), ($\beta$), dans ($\alpha$), il vient :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} T_n \sin\varphi\, f(\varphi,\zeta) d\varphi\, d\zeta$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} T_n d\varphi\, d\zeta \left[\frac{d\left[\sin\varphi \frac{df(\varphi,\zeta)}{d\varphi}\right]}{d\varphi} + \frac{d^2f(\varphi,\zeta)}{d\zeta^2 \sin\varphi}\right],$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} T_n\, d\varphi\, d\zeta\, F(\varphi,\zeta).$$

*Corollaire* 1. Si l'on met $P_n$ à la place de $T_n$, on a :

$$(170) \quad U_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n f(\varphi,\zeta) \sin\varphi\, d\varphi\, d\zeta$$

$$= -\frac{2n+1}{n(n+1)4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n F(\varphi,\zeta)\, d\varphi\, d\zeta.$$

*Corollaire* 2. Soit $k$ la plus grande valeur de $F(\varphi,\zeta)$, comme 1 est la valeur maximum de $P_n$, il vient :

$$U_n < \frac{2n+1}{n(n+1)4\pi} \cdot k < \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\zeta = \frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)} k = \frac{(2+\frac{1}{n})\pi k}{2(1+n)}.$$

Or, pour $n=\infty$, cette dernière expression se réduit à zéro ; il en sera par conséquent de même pour $U_n$, donc la suite :

$$f(\theta,\psi)=U_0+U_1+U_2+\text{etc.}$$

est convergente.

### 5me Théorème.

*Soit* $V_m$ *une fonction de la même nature que* $U_n$, *soit de plus* m *différent de* n, *je dis que l'on aura :*

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} U_n V_m \sin\theta\, d\theta\, d\psi = 0. \qquad (171)$$

*Démonstration.* Soit $f(\theta,\psi)=V_m$, on a :

$$F(\theta,\psi)=\frac{d\left[\sin\theta\,\frac{df(\theta,\psi)}{d\theta}\right]}{d\theta}+\frac{d^2f(\theta,\psi)}{\sin\theta\, d\psi^2}=\frac{d\left[\sin\theta\,\frac{dV_m}{d\theta}\right]}{d\theta}+\frac{d^2V_m}{\sin\theta\, d\psi^2},$$

$$=-m(m+1)\sin\theta\, V_m.$$

Donc (169) donne :

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} U_nV_m\sin\theta\, d\theta\, d\psi=\frac{m(m+1)}{n(n+1)}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} U_nV_m\sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Cette formule devant subsister, et $m$ différant de $n$, il est clair qu'on doit avoir :

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} U_nV_m\sin\theta\, d\theta\, d\psi=0.$$

### 6me Théorème.

*Si l'on désigne par* $T_n$ *ce que devient* $U_n$ *en changeant* $\theta,\psi$ *en* $\varphi,\xi$, *je dis que l'on aura :*

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_nU_n\sin\theta\, d\theta\, d\psi=\frac{4\pi}{2n+1}T_n. \qquad (172)$$

*Démonstration.* Nous avons posé :

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_n f(\varphi,\xi)\sin\varphi\, d\varphi\, d\xi=\frac{4\pi}{2n+1}U_n.$$

Changeons $\theta,\psi$ en $\varphi,\zeta$ ; $P_n$ ne changera pas ; car $P_n$ est une fonction de $p$ qui est symétrique par rapport à $\theta,\psi$ et $\varphi,\zeta$. On a donc :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n f(\theta,\psi) \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{4\pi}{2n+1} T_n.$$

Mais on a :

$$f(\theta,\psi) = U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots ;$$

donc :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n(U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots) \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{4\pi}{2n+1} T_n.$$

Donc, à cause de (171), et en ayant égard à ce que $P_n$ est de la même nature que $U_n$, tous les termes du premier membre de la formule précédente disparaîtront à l'exception de celui qui renferme $U_n$; par conséquent on a :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n U_n \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{4\pi}{2n+1} T_n.$$

## 2me Problème.

*Soient* $u = f(x, y, z)$, $z = r\cos\theta$, $x = r\cos\theta\cos\psi$, $y = r\sin\theta\sin\psi$, *d'où :* $u = F(r,\psi,\theta)$, *trouver le développement de* u *en quantités périodiques des variables* $r, \theta, \psi$.

*Solution.* Soient $\varphi$ et $\zeta$ deux constantes et $r$ la seule variable de la fonction $F(r,\psi,\zeta)$, on aura par la formule (51) de Fourier :

$$F(r,\varphi,\zeta) = \frac{1}{c}\int_0^c F(\varsigma,\varphi,\zeta) d\varsigma +$$

$$\frac{2}{c}\Sigma_1 \left[ \cos\frac{m\pi r}{c} \int_0^c F(\varsigma,\varphi,\zeta) \cos\frac{m\pi\varsigma}{c} d\varsigma \right]. \qquad (\alpha)$$

Le signe $\Sigma_1$ désigne ici la somme des termes que l'on obtient en fesant dans l'expression entre crochets $m$ successivement égal à 1, 2, 3, etc.

Mais si l'on suppose que $\varphi$ et $\zeta$ soient les seules variables de $F(r,\varphi,\zeta)$, on a :

$$U_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n F(r,\varphi,\zeta)\sin\varphi\, d\varphi\, d\zeta\ ,$$

donc, quand $r$ varie aussi :

$$U_n = \frac{2n+1}{4\pi}\Big\{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n\Big[\frac{1}{c}\int_0^{c} F(\varsigma,\varphi,\zeta)\, d\varsigma +$$

$$\frac{2}{c}\,\Sigma_1\,[\cos\frac{m\pi r}{c}\int_0^{c} F(\varsigma,\varphi,\zeta)\cos\frac{m\pi\varsigma}{c}\, d\varsigma\,]\Big]\sin\varphi\, d\varphi\, d\zeta\Big\},$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi c}\int_0^{c}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varsigma,\varphi,\zeta)\, P_n \sin\varphi\, d\varsigma\, d\varphi\, d\zeta +$$

$$\frac{2n+1}{2\pi c}\,\Sigma_1\Big\{\cos\frac{m\pi r}{c}\int_0^{c}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varsigma,\varphi,\zeta)\, P_n \cos\frac{m\pi r}{c}\sin\varphi\, d\varsigma\, d\varphi\, d\zeta\Big\}.$$

Mais on a : $\quad u = F(r,\psi,\theta) = U_0 + U_1\ \ldots = \Sigma\, U_n\,;$ $\quad$ donc

$$u = F(r,\psi,\theta) = \frac{1}{4\pi c}\,\Sigma\Big\{\int_0^{c}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varsigma,\varphi,\zeta)\sin\varphi\, d\varsigma\, d\varphi\, d\zeta\Big\}(2n+1)P_n +$$

$$\frac{1}{2\pi c}\,\Sigma\,\Sigma_1\Big\{\int_0^{c}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\pi\varsigma}{c} F(\varsigma,\varphi,\zeta)\sin\varphi\, d\varsigma\, d\varphi\, d\zeta\Big\}$$

$$(2n+1)\, P_n \cos\frac{m\pi r}{c}. \quad (173)$$

*Corollaire.* Pour $c = \infty$, la form. ($\alpha$) donne :

$$F(r,\varphi,\zeta) = 2\Sigma_1\,[\int_0^{c}\cos\frac{m\pi\varsigma}{c} F(\varsigma,\varphi,\zeta)\,]\cos\frac{m\pi r}{c}\cdot\frac{1}{c}.$$

Soit $\frac{m\pi}{c} = \alpha$, $\frac{1}{c} = d\alpha$, alors $\Sigma_1$ devient $\int$, et l'on aura :

$$F(r,\varphi,\zeta) = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos\alpha\varsigma\, F(\varsigma,\varphi,\zeta)\, d\varsigma\cos\alpha r\, d\alpha.$$

Donc, $\quad U_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n F(r,\varphi,\zeta)\sin\varphi\, d\varphi\, d\zeta$ , $\quad$ devient :

$$U_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n \left\{ 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos \alpha\varsigma \, F(\varsigma,\varphi,\zeta) d\varsigma \cos \alpha r \, d\alpha \right\} \sin\varphi \, d\varphi \, d\zeta.$$

Cela posé, comme on a :

$$u = F(r,\theta,\psi) = U_0 + U_1 + \text{etc.} + U_n + \text{etc.} = \Sigma U_n,$$

il vient :

$$u = F(r,\theta,\psi) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \Sigma \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varsigma,\varphi,\zeta) \sin\varphi \cos\alpha\varsigma \cos\alpha r \, d\alpha \, d\varsigma \, d\varphi \, d\zeta \right\} (2n+1) P_n.$$

Cette dernière formule convient à tous les points de l'espace. En coordonnées rectangulaires elle serait :

$$u = f(x,y,z) =$$

$$\frac{1}{\pi^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta) \cos\alpha(x-\xi) \cos\beta(y-\eta) \cos\gamma(z-\zeta) \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$



## Appendice du III^me livre.

Nous donnons dans cet appendice, d'après M. Schlömilch, (*Allegemeine umkehrung der functionen. Halle*, 1849) un aperçu d'une nouvelle Méthode pour déduire d'une relation donnée de la forme $x = \psi(y)$
réciproquement, sa résolution par rapport à une fonction de $y$, de la forme $f(y) = \varphi(x)$.

Nous partageons ce résumé du travail de M. Schlömilch en deux parties; dans la première nous ferons usage, pour établir ce retour des fonctions, des séries de Fourier et de Lagrange, procédant suivant les cosinus et les sinus des arcs multiples; et dans la deuxième nous emploierons, pour la même inversion, les intégrales doubles de Fourier. D'après cela, la 1re méthode donne l'expression de $f(y)$ en une série infinie, et la 2me fera connaître cette même fonction sous une forme finie. Le premier procédé sera plus

avantageux lorsqu'il s'agira d'évaluations numériques; et l'on devra donner la préférence à la seconde transformation dans les cas où l'on voudra soumettre la fonction $f(y)$ à de nouvelles combinaisons de calcul.

## 1^re^ MÉTHODE.

### RETOUR DE L'ÉQUATION $x=\psi(y)$ PAR LES SÉRIES DE FOURIER ET DE LAGRANGE.

### 1^er^ PROBLÈME.

*Étant donnée l'équation* $x=\psi(y)$ *trouver en série la valeur d'une fonction quelconque* $f(y)$ *de* $y$, *développée suivant les cosinus et les sinus des multiples de* $x$.

*Solution.* (a) *Développement de* $f(y)$ *suivant les cosinus des multiples de* $x$.

Comme on a $x=\psi(y)$, soit $y=\chi(x)$, d'où $f(y)=f[\chi(x)]=\varphi(x)$. On a donc par la form. (57) :

1) $$f(y)=\tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos\frac{\pi x}{c}+A_2\cos\frac{2\pi x}{c}+\text{etc.}$$

$$A_n=\frac{2}{c}\int_0^c f(y)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx. \qquad c \geqq x \geqq 0.$$

Il s'agit de faire dépendre la valeur de $A_n$, de la fonction donnée $\psi(y)$.

Pour cela, on a d'abord, en intégrant par parties :

$$\int f(y)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx=\frac{c}{n\pi}f(y)\sin\frac{n\pi x}{c}-\frac{c}{n\pi}\int f'(y)dy\sin\frac{n\pi x}{c};$$

$$\text{à}\quad x=\begin{cases}c\\0\end{cases}\ \text{répondent}\quad \begin{array}{l}\psi(y)=c\,,\ y=\gamma\,,\\ \psi(y)=0\,,\ y=\eta.\end{array}$$

$\gamma$ est une racine de $\psi(y)=c$, telle que $\psi(\gamma)=c$; sous ce rapport $\gamma$ est arbitraire et seulement astreint à la condition de rendre $\psi(\gamma)$ positif; car $c$ est un nombre positif quelconque.

$\eta$ est une racine de l'équation $\psi(y)=0$.

En prenant l'intégrale du premier membre de l'équation précé-

dente, entre 0 et $c$, il faudra prendre celle du second entre $\eta$ et $\gamma$, ce qui nous donne successivement :

$$\int f(y)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx = \frac{c}{n\pi}\,f(y)\sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)} - \frac{c}{n\pi}\int f'(y)dy\sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}$$

$$\int_0^c f(y)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx = \frac{c}{n\pi}f(\gamma)\sin\frac{n\pi\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)} - \frac{c}{n\pi}f(\eta)\sin\frac{n\pi\psi(\eta)}{\psi(\gamma)}$$

$$- \frac{c}{n\pi}\int_\eta^\gamma f'(y)dy\sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}$$

à cause de $\sin n\pi = 0$, $\psi(\eta) = 0$,

$$= -\frac{c}{n\pi}\int_\eta^\gamma f'(y)dy\sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}.$$ Donc,

$$A_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(y)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma f'(y)dy\sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}.$$

Il reste encore à déterminer à part la valeur de

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \frac{1}{c}\int_0^c f(y)dx.$$

Or, on a :

$$\int f(y)dx = xf(y) - \int x f'(y)dy,$$
$$= \psi(y)\cdot f(y) - \int \psi(y)\cdot f'(y)dy;$$ d'où :

$$\int_0^c f(y)dx = \psi(\gamma)f(\gamma) - \psi(\eta)\cdot f(\eta) - \int_\eta^\gamma \psi(y)f'(y)dy,$$

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \frac{1}{c}\int_0^c f(y)dx = \frac{f(\gamma)\cdot\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)} - \frac{1}{\psi(\gamma)}\int_\eta^\gamma \psi(y)f'(y)dy,$$

$$= f(\gamma) - \frac{1}{\psi(\gamma)}\int_\eta^\gamma \psi(y)f'(y)dy.$$

On a donc enfin :

A) $$f(y) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + A_2\cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.} \qquad \psi(\gamma) \geqq x \geqq 0,$$

$$A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma f'(y)dy\sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}.$$

$\eta$ est une racine de l'équation $\psi(y) = 0$, $\gamma$ est une constante arbitraire assujettie à la seule condition de rendre $\psi(\gamma)$ positif. Il est avantageux de choisir $\gamma$ de telle sorte que $\psi(\gamma)$ soit un maximum, ce qui exige que l'on cherche la valeur maximum de $\psi(y)$.

On a de plus $\frac{1}{2}A_0 = f(\gamma) - \frac{1}{\psi(\gamma)}\int_\eta^\gamma \psi(y)\, f'(y)dy.$

*Corollaire.* Dans le cas où l'on demande la valeur de $y$ en fonction de $x$, il suffira de faire dans A)

$$f(y) = y\,,\quad \text{donc}\quad f'(y) = 1\,,\ f(\gamma) = \gamma\,,$$

ce qui donne la formule particulière :

$$(a)\qquad y = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.},\quad \psi(\gamma) > x > 0\,,$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma dy \sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,,$$

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \gamma - \frac{1}{\psi(\gamma)}\int_\eta^\gamma \psi(y)dy.$$

1[re] *Remarque.* Les form. A) et $(a)$ sont susceptibles de plusieurs valeurs, correspondantes aux diverses racines de

$$\psi(y) = 0\,;$$

chacune de ces racines donnera une équation semblable à A) et à $(a)$.

2[me] *Remarque.* Si la racine désignée par $\eta$ était imaginaire de la forme

$$\eta = u + v\sqrt{-1}\,,$$

on aurait pour $A_n$ une expression imaginaire complexe de la même forme. En effet, dans la form. $(a)$, par exemple, où l'on a :

$$A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_{u+v\sqrt{-1}}^{\gamma} \sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}dy\,,$$

posons $y = u + w$, $w$ étant une nouvelle variable,

$$dy = dw\,;\ \text{pour}\ y = \left\{\begin{matrix}\gamma\\ u+w\end{matrix}\right.,\ \text{on aura}\ w = \left\{\begin{matrix}\gamma - u\\ v\sqrt{-1}\end{matrix}\right.;$$

donc :

$$A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_{v\sqrt{-1}}^{\gamma-u} \sin\frac{n\pi\psi(u+w)}{\psi(\gamma)}\,dw$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[\int_0^{\gamma-u}\sin\frac{n\pi\psi(u+w)}{\psi(\gamma)}dw + \int_{v\sqrt{-1}}^{0}\sin\frac{n\pi\psi(u+w)}{\psi(\gamma)}dw\right].$$

Si dans la dernière intégrale on pose

$$w = t\sqrt{-1},$$

$$\text{aux limites } w = \begin{cases} 0 \\ v\sqrt{-1} \end{cases}, \text{ répondront } t = \begin{cases} 0 \\ v \end{cases};$$

donc :

$$A_n = -\frac{2}{n\pi}\left[\int_0^{\gamma-u}\sin\frac{n\pi\psi(u+w)}{\psi(\gamma)}dw + \sqrt{-1}\int_v^0 \sin\frac{n\pi\psi(u+t\sqrt{-1})dt}{\psi(\gamma)}\right.$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\gamma-u}\sin\frac{n\pi\psi(u+w)}{\psi(\gamma)}dw + \frac{2\sqrt{-1}}{n\pi}\int_0^{v}\sin\frac{n\pi\psi(u+t\sqrt{-1})}{\psi(\gamma)}dt.$$

(b) *Développement suivant les sinus des multiples de* x.

On a, par la form. (58) :

2) $$f(y) = B_1\sin\frac{\pi x}{c} + B_2\sin\frac{2\pi x}{c} + \text{etc.} \qquad c > x > 0,$$

$$B_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(y)\sin\frac{n\pi x}{c}dx.$$

Pour obtenir la transformation convenable de $B_n$, il faut intégrer d'abord par parties $\int f(y)\sin\frac{n\pi x}{c}dx$, ce qui donne :

$$\int f(y)\sin\frac{n\pi x}{c}dx = -\frac{c}{n\pi}f(y)\cos\frac{n\pi x}{c} + \frac{c}{n\pi}\int f'(y)dy\cos\frac{n\pi x}{c}.$$

En intégrant le premier membre entre 0 et $c$, il faudra intégrer le second entre $\eta$ et $\gamma$, ce qui donne pour

$$\int f(y)\sin\frac{n\pi x}{c}dx = -\frac{c}{n\pi}f(y)\cos\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)} + \frac{c}{n\pi}\int f'(y)dy\cos\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)},$$

l'expression

$$\int_0^1 f(y) \sin \frac{n\pi x}{c}\, dx = -\frac{c}{n\pi} f(\gamma) \cos \frac{n\pi\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)} + \frac{c}{n\pi} f(\eta) \cos \frac{n\pi\psi(\eta)}{\psi(\gamma)} + \frac{c}{n\pi} \int_\eta^\gamma f'(y)dy \cos \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)} .$$

d'où :

$$B_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(y) \sin \frac{n\pi x}{c}\, dx = \frac{2}{n\pi} \left[ (-1)^{n+1} f(\gamma) + f(\eta) + \int_\eta^\gamma f'(y)dy \cos \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)} \right] ;$$

On peut donner à cette expression une forme un peu plus commode, en posant

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \int_\eta^\gamma \left[ f'(y)dy \cos \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)} \right] ;$$

alors on a :

$$B_n = \frac{2f(\gamma)}{\pi} \; \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2f(\eta)}{\pi} \cdot \frac{1}{n} + C_n ,$$

d'où l'on tire, pour

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$B_1 = \frac{2f(\gamma)}{\pi} \cdot \frac{1}{1} + \frac{2f(\eta)}{\pi} \cdot \frac{1}{1} + C_1 ,$$

$$B_2 = \frac{2f(\gamma)}{\pi} \cdot \frac{-1}{2} + \frac{2f(\eta)}{\pi} \cdot \frac{1}{2} + C_2 ,$$

$$B_3 = \frac{2f(\gamma)}{\pi} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2f(\eta)}{\pi} \cdot \frac{1}{3} + C_3 ,$$

etc. etc.

En substituant ces valeurs dans la formule 2), il vient :

3) $$f(y) = \frac{2f(\gamma)}{\pi} \cdot \frac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{c} + \frac{2f(\eta)}{\pi} \cdot \frac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{c} + C_1 \sin \frac{\pi x}{c}$$

$$+ \frac{2f(\gamma)}{\pi} \cdot \frac{-1}{2} \sin \frac{2\pi x}{c} + \frac{2f(\eta)}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{c} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{c}$$

$$+ \frac{2f(\gamma)}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{c} + \frac{2f(\eta)}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{c} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{c}$$

$+$ etc.

$$= \frac{2\mathrm{f}(\gamma)}{\pi}\left\{\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{c} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c} - \text{etc.}\right\}$$

$$+ \frac{2\mathrm{f}(\eta)}{\pi}\left\{\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{c} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ \mathrm{C}_1\sin\frac{\pi x}{c} + \mathrm{C}_2\sin\frac{2\pi x}{c} + \mathrm{C}_3\sin\frac{3\pi x}{c} + \text{etc.}$$

Mais comme on a, en général,

$$\tfrac{1}{2}u = \sin u - \tfrac{1}{2}\sin 2u + \tfrac{1}{3}\sin 3u - \text{etc.},$$

$$\tfrac{1}{2}(\pi - u) = \sin u + \tfrac{1}{2}\sin 2u + \tfrac{1}{3}\sin 3u + \text{etc.},$$

l'équation 3) devient :

$$\mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(\eta) + \frac{\mathrm{f}(\gamma) - \mathrm{f}(\eta)}{\psi(\gamma)}x + \mathrm{C}_1\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + \mathrm{C}_2\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.}$$

Pour $x = 0$, elle donne $\mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(\eta)$, ce qui doit être; pour $x = \psi(\gamma)$, elle devient $\mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(\gamma)$, ce qui est exact. La formule précédente embrasse donc aussi les valeurs $x = 0$, $x = \psi(\gamma)$, et on a définitivement :

$$\text{B)}\quad \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(\eta) + \frac{\mathrm{f}(\gamma) - \mathrm{f}(\eta)}{\psi(\gamma)}\cdot x + \mathrm{C}_1\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + \mathrm{C}_2\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.},$$

$$\psi(\gamma) \geqq x \geqq 0,$$

$$\mathrm{C}_n = \frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma \mathrm{f}'(y)\cos\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy.$$

*Corollaire.* Pour $\mathrm{f}(y) = y$, on a :

$$(b)\quad y = \eta + \frac{\gamma - \eta}{\psi(\gamma)}x + \mathrm{C}_1\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + \mathrm{C}_2\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.},$$

$$\psi(\gamma) \geqq x \geqq 0,$$

$$\mathrm{C}_n = \frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma \cos\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy.$$

*Remarque.* En supposant que $\eta_1$, $\eta_2$, etc. soient d'autres racines de l'équation $\psi(y) = 0$, on aura, pour ces racines, des valeurs de $\mathrm{f}(y)$ et $y$, tout-à-fait semblables à celles données par les relations B) et $(b)$.

(c) *Développement de* f(y) *suivant les cosinus et les sinus des multiples de* x.

On a, par la form. (74) :

$$f(y) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{c} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + \text{etc.}$$

$$c > x > -c$$

$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{c} + B_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + \text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(y)dx,$$

$$A_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(y)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx,$$

$$B_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(y)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx.$$

Il s'agit d'abord de déterminer les valeurs de $\frac{1}{2}A_0$, $A_n$, $B_n$ en fonction de $\psi(y)$. A cet effet, comme aux valeurs de

$$x = \begin{Bmatrix} c \\ -c \end{Bmatrix} \text{ répondent } \begin{Bmatrix} \psi(y) = c;\ \text{soit } y = \gamma,\ \text{donc } \psi(\gamma) = c; \\ \psi(y) = -c, = -\psi(\gamma);\ \text{soit } y = \bar{\gamma}, \psi(\bar{\gamma}), \psi(\bar{\gamma}) = -\psi(\gamma), \end{Bmatrix}$$

on aura :

1° *Pour déterminer* $\frac{1}{2}A_0$,

$$\int f(y)dx = xf(y) - \int x f'(y)dy = \psi(y)\cdot f(y) - \int \psi(y)\cdot f'(y)dy;$$

donc :

$$\int_{-c}^{c} f(y)dx = \psi(\gamma)f(\gamma) - \psi(\bar{\gamma})f(\bar{\gamma}) - \int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} \psi(y)f'(y)dy,$$

$$= \psi(\gamma)f(\gamma) + \psi(\gamma)f(\bar{\gamma}) - \int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} \psi(y)f'(y)dy;$$

d'où :

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(y)dx = \frac{f(\gamma) + f(\bar{\gamma})}{2} - \frac{1}{2\psi(\gamma)}\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} \psi(y)\cdot f'(y)dy.$$

### 2° *Pour déterminer* $A_n$.

On a :

$$\int f(y) \cos \frac{n\pi x}{c} dx = \frac{c}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{c} - \frac{c}{n\pi} \int f'(y) dy \sin \frac{n\pi x}{c},$$

$$= \frac{c}{n\pi} \sin \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)} - \frac{c}{n\pi} \int f'(y) dy \sin \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)};$$

$$A_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} f(y) \cos \frac{n\pi x}{c} dx = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)} - \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi\psi(\bar{\gamma})}{\psi(\gamma)}$$

$$- \frac{1}{n\pi} \int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y) dy \sin \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)},$$

$$= - \frac{1}{n\pi} \int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y) dy \sin \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}.$$

### 3° *Pour déterminer* $B_n$.

On a :

$$\int f(y) \sin \frac{n\pi x}{c} dx = - \frac{c}{n\pi} f(y) \cos \frac{n\pi x}{c} + \frac{c}{n\pi} \int f'(y) dy \cos \frac{n\pi x}{c},$$

$$= - \frac{c}{n\pi} f(y) \cos \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)} + \frac{c}{n\pi} \int f'(y) dy \cos \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)};$$

donc :

$$\int_{-c}^{c} f(y) \sin \frac{n\pi x}{c} dx = \frac{c}{n\pi} f(\gamma) \cos \frac{n\pi\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)} + \frac{c}{n\pi} f(\bar{\gamma}) \cos \frac{n\pi\psi(\gamma)}{\psi(\gamma)}$$

$$+ \frac{c}{n\pi} \int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y) dy \cos \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)},$$

$$B_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} f(y) \sin \frac{n\pi x}{c} dx = (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi} \left[ f(\gamma) - f(\bar{\gamma}) \right]$$

$$+ \frac{1}{n\pi} \int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y) dy \cos \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}.$$

On peut donner à la formule cherchée une forme plus commode en posant

$$C_n = \frac{1}{n\pi}\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\cos\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy\,;$$

car alors on a :

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}[f(\gamma) - f(\bar{\gamma})] + C_n\,;$$

d'où l'on tire :

$$B_1 = \frac{1}{\pi}f(\gamma) - \frac{1}{\pi}f(\bar{\gamma}) + C_1\,,$$

$$B_2 = -\frac{1}{2\pi}f(\gamma) + \frac{1}{2\pi}f(\bar{\gamma}) + C_2\,,$$

$$B_3 = +\frac{1}{3\pi}f(\gamma) - \frac{1}{3\pi}f(\bar{\gamma}) + C_3\,,$$

etc.

par là :

$$B_1\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + B_2\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + B_3\sin\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{\pi}f(\gamma)\left[\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} - \tfrac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \tfrac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} - \right]$$

$$- \frac{1}{\pi}f(\bar{\gamma})\left[\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} - \tfrac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \tfrac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} - \right]$$

$$+ C_1\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + C_2\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.},$$

$$= \frac{f(\gamma) - f(\bar{\gamma})}{2\psi(\gamma)}x + C_1\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + C_2\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.}$$

On a donc :

$$f(y) = \frac{f(\gamma) - f(\bar{\gamma})}{\psi(\gamma)}\cdot\frac{x}{2} + \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + A_2\cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.} +$$

$$C_1\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + C_2\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \text{etc.}, \qquad \psi(\gamma) > x > -\psi(\gamma)\,,$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\cos\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy\,,$$

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \frac{f(\gamma)+f(\bar\gamma)}{2} - \frac{1}{2\psi(\gamma)}\int_{\bar\gamma}^{\gamma}\psi(y)\,f'(y)dy\,,$$

$$A_n = -\frac{1}{n\pi}\int_{\bar\gamma}^{\gamma} f'(y)dy\sin\frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,.$$

$\gamma$ est une racine de $\psi(y)=c$,

$\bar\gamma$ est une racine de $\psi(y)=-c=-\psi(\gamma)$;

de la pluralité de ces racines dépendra celle des valeurs de $f(y)$.

*Corollaire.* Pour $f(y)=y$, la formule précédente subsistera, pourvu que l'on y fasse :

$$f'(y)=1\,,\ f(\gamma)=\gamma\,,\ f(\bar\gamma)=\bar\gamma\,.$$

## 2me MÉTHODE.

### RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $x=\psi(y)$, PAR L'EMPLOI DES INTÉGRALES DOUBLES DE FOURIER.

### 2me PROBLÈME.

x *étant positif, décrire de* $x=\psi(y)$, *une valeur de* $f(y)$, *sous forme finie.*

*Solution.* On a, par les intégrales de Fourier :

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xudu\int_0^c F(x)\cos uxdx\,,\qquad (\alpha)\qquad c\geqq x\geqq 0\,,$$

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xudu\int_0^c F(x)\sin uxdx.\qquad (\beta)\qquad c>x>0.$$

Cela posé, soit $F(x)=f[\varphi(x)]=f(y)$, l'intégration par parties donne :

$$\int F(x)\cos uxdx = \int f(y)\cos uxdx\,,$$

$$= f(y)\frac{\sin ux}{u} - \frac{1}{u}\int f'(y)dy\sin ux\,,$$

$$= f(y)\frac{\sin ux}{u} - \frac{1}{u}\int f'(y)\sin[u\psi(y)]dy\,;$$

Donc, si pour $x = \left\{ \begin{matrix} c \\ 0 \end{matrix} \right.$, on a $y = \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \gamma \end{matrix} \right.$, $f(\eta)$ n'étant pas infini, il vient :

$$\int_0^c F(x)\cos uxdx = f(\gamma)\frac{\sin uc}{u} - \frac{1}{u}\int_\eta^\gamma f'(y)\sin[u\psi(y)]dy.$$

En substituant cette valeur dans ($\alpha$), on trouve :

$$f(y) = \frac{2}{\pi}f(\gamma)\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin cu}{u}du - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}du\int_\eta^\gamma f'(y)\sin[u\psi(y)]dy,$$

$$= \frac{2}{\pi}f(\gamma)\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}du\int_\eta^\gamma f'(y)\sin[u\psi(y)]dy,$$

$$= f(\gamma) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}du\int_\eta^\gamma f'(y)\sin[u\psi(y)]dy, \quad \psi(\gamma) > x \geqq 0. \quad \text{(I)}$$

Nous avons fait usage de l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu \sin cu}{u}du = \frac{\pi}{2}, \qquad x > c > 0$$

qu'on démontre aisément, en posant dans l'intégrale double

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xudu\int_0^c \varphi(t)\cos utdt, \quad 0 > x > c,$$

$$\varphi(x) = \varphi(t) = 1, \int_0^c \cos utdt = \frac{\sin cu}{u}.$$

On a de même :

$$\int F(x)\sin uxdx = \int f(y)\sin uxdx,$$

$$= - f(y)\frac{\cos ux}{u} + \frac{1}{u}\int f'(y)\cos[u\psi(y)]dy;$$

d'où :

$$\int_0^c F(x)\sin uxdx = - f(\gamma)\frac{\cos cu}{u} + f(\eta)\frac{1}{u} + \frac{1}{u}\int_0^\gamma f'(y)\cos[u\psi(y)]dy.$$

En substituant cette valeur dans la formule ($\beta$), on trouve :

$$f(y) = -\frac{2}{\pi} f(\gamma) \int_0^\infty \frac{\sin xu \cos cu}{u} du + \frac{2}{\pi} f(\eta) \int_0^\infty \frac{\sin xu}{u} du +$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xu}{u} du \int_\eta^\gamma f'(y) \cos [u \psi(y)] dy,$$

$$= f(\eta) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xu}{u} du \int_\eta^\gamma f'(y) \cos [u \psi(y)] dy. \quad \psi(\gamma) > x > 0 \quad \text{(II)}$$

Nous avons fait usage ici de la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin xu \cos cu}{u} du = 0, \qquad x > c,$$

qu'on démontre aisément, en posant dans l'expression

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin xudu \int_0^c \varphi(t) \sin utdt, \quad 0 < x < c.$$

$$\varphi(x) = \varphi(t) = 1, \int_0^c \sin utdt = -\frac{\cos cu}{u} + \frac{1}{u}.$$

Observons encore que, dans les formules cherchées (I) et (II), $\gamma$ est quelconque, $\psi(\gamma)$ positif, $\eta$ une racine de l'équation $\psi(y) = 0$. Si pour $\eta$ on pose successivement toutes les racines de cette équation, on aura les différentes solutions que comporte le retour de la fonction $x = \psi(y)$. Ajoutons aussi qu'il convient de prendre pour $\psi(\gamma)$ sa valeur maximum.

### 3^me^ Problème.

*x étant quelconque, positif ou négatif, déduire de la relation donnée* $x = \psi(y)$, *une fonction* $f(y)$, *exprimée par* x.

*Solution.* Pour cela, nous prendrons la formule

$$(\gamma) \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-c}^c F(t) \cos u(x-t) dt,$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos xudu \int_{-c}^c F(t) \cos utdt + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin xudu \int_{-c}^c F(t) \sin utdt,$$

$$-c < x < c.$$

Si de l'équation $x=\psi(y)$, on suppose tiré $y=\varphi(x)$, on pourra poser $f(y)=f[\varphi(x)]=F(x)$, et alors l'intégration par parties donne :

$$\int F(x)\cos uxdx = f(y)\frac{\sin ux}{u} - \frac{1}{u}\int f'(y)\sin[u\psi(y)]\,dy,$$

$$\int F(x)\sin xudx = -f(y)\frac{\cos ux}{u} + \frac{1}{u}\int f'(y)\cos[u\psi(y)]dy.$$

Si nous supposons qu'aux

limites $x=\left\{\begin{matrix}c\\-c\end{matrix}\right.$, répondent les limites $y=\left\{\begin{matrix}\gamma\\\bar{\gamma}\end{matrix}\right.$, on a :

$$\int_{-c}^{c} F(x)\cos uxdx = \left\{f(\bar{\gamma})+f(\gamma)\right\}\frac{\sin cu}{u} - \frac{1}{u}\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\sin[u\psi(y)]dy,$$

$$\int_{-c}^{c} F(x)\sin uxdx = \left\{f(\bar{\gamma})-f(\gamma)\right\}\frac{\cos cu}{u} + \frac{1}{u}\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\cos[u\psi(y)dy].$$

Changeons $x$ en $t$, multiplions la 1re par $\cos xudu$, la 2de par $\sin xudu$, puis intégrons entre $u=0$, $u=\infty$, on obtient :

$$\int_0^\infty \cos xudu\int_{-c}^{c} F(t)\cos utdt = \left\{f(\bar{\gamma})+f(\gamma)\right\}\int_0^\infty \frac{\sin cu\cos xu}{u}du -$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}du\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\sin[u\psi(y)]dy,$$

$$\int_0^\infty \sin xudu\int_{-c}^{c} F(t)\sin utdt = \left\{f(\bar{\gamma})-f(\gamma)\right\}\int_0^\infty \frac{\cos cu\sin xu}{u}du +$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}du\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\cos[u\psi(y)]dy.$$

Comme on a :

$$\int_0^\infty \frac{\sin cu\cos xu}{u}du = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos cu\sin xu}{u}du = 0, \quad 0<x<c.$$

On trouve, en multipliant par $\frac{1}{\pi}$ :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xudu \int_{-c}^{c} \mathrm{F}(t)\cos utdt =$$

$$\frac{\mathrm{f}(\gamma)+\mathrm{f}(\bar{\gamma})}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}du\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma} \mathrm{f}'(y)\sin[u\psi(y)]dy,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin xudu\int_{-c}^{c}\mathrm{F}(t)\sin utdt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}du\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma}\mathrm{f}'(y)\cos[u\psi(y)]dy.$$

La somme de ces dernières donnant $\mathrm{F}(x)=\mathrm{f}(y)$, on a :

$$\mathrm{f}(y) = \frac{\mathrm{f}(\gamma)+\mathrm{f}(\gamma)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma}\mathrm{f}'(y)\sin[x-\psi(y)]dy; \qquad \text{(III)}$$

$$\psi(\bar{\gamma})<x<\psi(\gamma),$$
$$\psi(\bar{\gamma}) = -\psi(\gamma).$$

$\gamma$ est quelconque, $\bar{\gamma}$ est une racine de l'équation $\psi(y)=-\psi(\gamma)$.

FIN DU TROISIÈME LIVRE.

## IV$^{me}$ LIVRE.

—

SUR

# LES FONCTIONS GAMMA,

## ET QUELQUES AUTRES TRANSCENDANTES.

Nous diviserons ce livre en trois Sections; dans la première nous exposerons les principes fondamentaux des intégrales eulériennes de la 1$^{re}$ espèce; dans la deuxième nous donnerons la théorie des fonctions gamma, c'est-à-dire des intégrales eulériennes de la 2$^{de}$ espèce, et dans la troisième nous nous occuperons des intégrales qui se rapportent à la transcendante $li\cdot x$.

### 1$^{re}$ SECTION.

### INTÉGRALES EULÉRIENNES DE LA 1$^{re}$ ESPÈCE, OU FONCTIONS B.

On nomme intégrale eulérienne de la 1$^{re}$ espèce la transcendante

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\,,$$

dans laquelle $p$ et $q$ sont des nombres positifs. Je vais exposer les principales propriétés de cette fonction.

1$^{er}$ THÉORÈME.

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}dx}{(1+x)^{p+q}}\,. \qquad (1)$$

*Démonstration.* En effet, on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p-1}} \cdot \frac{1}{(1+x)^{q-1}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}.$$

Soit $z = \frac{x}{1+x}$, d'où $x = \frac{z}{1-z}$, on aura pour $x = \left\{\begin{matrix}\infty \\ 0\end{matrix}\right.$, les valeurs $z = \left\{\begin{matrix}1 \\ 0\end{matrix}\right.$, $dx = \frac{dz}{(1-z)^2}$, $1+x = \frac{1}{1-z}$, $\frac{dx}{(1+x)^2} = dz$, $\frac{1}{(1+x)^{q-1}} = (1-z)^{q-1}$ ; donc, la relation précédente devient :

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}} = \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

En changeant $p$ en $q$, $q$ en $p$ on a : $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}} = \int_0^\infty \frac{x^{q-1}dx}{(1+x)^{p+q}}$.

*Remarque.* Nous désignerons, avec M. Binet, les intégrales eulériennes de la 1[re] espèce par la notation $B(p,q)$ ; en sorte que l'on a :

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}} = \int_0^\infty \frac{x^{q-1}dx}{(1+x)^{p+q}} = B(p,q).$$

Nous nommerons ces transcendantes, des fonctions B. Dans l'exposition des principes qui se rapportent à ces fonctions, nous avons principalement consulté le beau Mémoire de M. Binet sur les intégrales définies eulériennes, inséré dans le t. XVI, 27[e] cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique*. Les recherches premières sur ces transcendantes se trouvent dans le *Calcul intégral* d'Euler, ch. VIII. Voyez aussi sur la même matière, les *Exercices de calcul intégral*, par Legendre, et son ouvrage postérieur sur les fonctions elliptiques et les intégrales eulériennes.

*Corollaire* 1. $B(1,1) = \int_0^1 x^0(1-x)^0 dx = \int_0^1 dx = 1.$ (2)

*Corollaire* 2. $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx\,(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

Pour $x = z^2$, on a :

$$B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi \ldots \qquad (3)$$

2^me^ Théorème.

$$B(p, q) = B(q, p). \qquad (4)$$

*Démonstration.* On a $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B(p,q)$.

Soit $x = 1 - z$, par suite $z = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, pour $x = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, $dx = -dz$;

donc

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -\int_1^0 (1-z)^{p-1}z^{q-1}dz = \int_0^1 z^{q-1}(1-z)^{p-1}dz = B(q,p).$$

3^me^ Théorème.

p *et* q *étant moindres que l'unité, je dis qu'on a :*

$$B(p,q) = \frac{1}{2^p}\left\{\frac{1}{p} + \frac{1-q}{2(1+p)} + \frac{(1-q)(2-q)}{2\cdot 4(2+p)} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2^q}\left\{\frac{1}{q} + \frac{1-p}{2(1+q)} + \frac{(1-p)(2-p)}{2\cdot 4(2+q)} + \text{etc.}\right\}. \qquad (5)$$

*Démonst.* Soit $x = \frac{1+y}{2}$, $y = 2x - 1$, $x = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, pour $y = \begin{cases}1\\-1\end{cases}$, on a :

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2^{p+q-1}}(1+y)^{p-1}(1-y)^{q-1}dy,$$

$$= \frac{1}{2^{p+q-1}}\int_{-1}^0 (1+y)^{p-1}(1-y)^{q-1}dy + \frac{1}{2^{p+q-1}}\int_0^1 (1+y)^{p-1}(1-y)^{q-1}dy,$$

$$= \frac{1}{2^{p+q-1}}\int_0^1 (1-y)^{p-1}(1+y)^{q-1}dy + \frac{1}{2^{p+q-1}}\int_0^1 (1+y)^{p-1}(1-y)^{q-1}dy. \qquad (\alpha)$$

Mais on a :

$$\frac{1}{2^{p+q-1}}\int_0^1 (1+y)^{p-1}(1-y)^{q-1}dy =$$

$$\frac{1}{2^{p+q-1}}\int_0^1 2^{p-1}(1-\frac{1-y}{1})^{p-1}(1-y)^{q-1}dy\,,$$

$$= \frac{1}{2^{p+q-1}}\int_0^1 2^{p-1}(1-y)^{q-1}\Big[1+\frac{1-p}{2}(1-y)+\frac{(1-p)(2-p)}{2\cdot 4}(1-y)^2$$

$$+\frac{(1-p)(2-p)(3-p)}{2\cdot 4\cdot 6}(1-y)^3+\text{etc.}\Big]dy\,,$$

$$= \frac{1}{2^q}\Big[\frac{1}{q}+\frac{1-p}{2(q+1)}+\frac{(1-p)(2-p)}{2\cdot 4(q+2)}+\text{etc.}\Big] \qquad (\beta)$$

Par le changement de $p$ en $q$, on trouve :

$$\int_0^1 (1-y)^{p-1}(1+y)^{q-1}dy = \frac{1}{2^p}\Big[\frac{1}{p}+\frac{1-q}{2(p+1)}+\frac{(1-q)(2-q)}{2\cdot 4(p+2)}+\text{etc.}\Big] \qquad (\gamma)$$

En ajoutant $(\beta)$ et $(\gamma)$, puis en substituant dans $(\alpha)$, on a la formule cherchée.

*Corollaire.* Pour $p=q$, on a :

$$B(p,p) = \frac{1}{2^{p-1}}\Big[\frac{1}{p}+\frac{1-p}{2(1+p)}+\frac{(1-p)(2-p)}{2\cdot 4(2+p)}+\text{etc.}\Big] \qquad (5)$$

Si dans $(\alpha)$ on fait $p=q$, on a aussi :

$$B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-2}}\int_0^1 (1-y^2)^{p-1}dy.$$

Soit $y^2=u$, on aura :

$$B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1}(1-u)^{p-1}du = \frac{1}{2^{2p-1}}B(\tfrac{1}{2},p). \qquad (6)$$

4$^{me}$ Théorème.

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{(z^{p-1}+z^{q-1})dz}{(1+z)^{p+q}}\,, \qquad (7)$$

$$\int_1^\infty \frac{(z^{p-1}+z^{q-1})dz}{(1+z)^{p+q}} = \int_0^1 \frac{(z^{p-1}+z^{q-1}dz)}{(1+z)^{p+q}}. \qquad (8)$$

*Démonstration.* On a :

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{z^{p-1}dz}{(1+z)^{p+q}}, \quad B(p,q)=\int_0^\infty \frac{z^{q-1}dz}{(1+z)^{p+q}};$$

donc, en ajoutant :

$B(p,q)=$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(z^{p-1}+z^{q-1})dz}{(1+z)^{p+q}}=\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{(z^{p-1}+z^{q-1})dz}{(1+z)^{p+q}}+\tfrac{1}{2}\int_1^\infty \frac{(z^{p-1}+z^{q-1})dz}{(1+z)^{p+q}}. \quad (\alpha)$$

Posons, dans la 2[de] intégrale, $z=\frac{1}{t}$; on aura :

$$t=\begin{cases}0\\1\end{cases}, \text{ pour } z=\begin{cases}\infty\\1\end{cases}, \text{ et par suite :}$$

$$B(p,q)=\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{z(^{p-1}+z^{q-1})dz}{(1+z)^{p+1}_r}+\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{(t^{q-1}+t^{p-1})dt}{(1+t)^{p+q}},$$

$$=\int_0^1 \frac{(z^{p-1}+z^{q-1})dz}{(1+z)^{p+q}}.$$

On a de plus, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(z^{p-1}+z^{q-1})dz}{(1+z)^{p+q}}=\int_0^1 \frac{(t^{q-1}+t^{p-1})dt}{(1+t)^{q+p}}$.

### 3[me] Théorème.

$$B(t+r,t-r)=2\int_0^\infty \frac{e^{2ru}+e^{-2ru}}{(e^u+e^{-u})^{2t}}du. \quad (9)$$

*Démonstration.* On a : $B(p,q)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{z^{p-1}dz}{(1+z)^{p+q}}$. Soit $z=e^{2u}$,

$$\text{d'où : } u=\begin{cases}\infty\\-\infty\end{cases}, \text{ pour } z=\begin{cases}\infty\\0\end{cases}; \text{ il vient :}$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}dz}{(1+z)^{p+q}}=2\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2pu}du}{(1+e^{2u})^{p+q}}=2\int_0^\infty \frac{e^{(p-q)u}du}{(e^u+e^{-u})^{p+q}}.$$

Donc : $\mathrm{B}(p,q)=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(p-q)u}du}{(e^{u}+e^{-u})^{p+q}}=2\int_{0}^{\infty}\frac{e^{(p-q)u}+e^{(q-p)u}}{(e^{u}+e^{-u})^{p+q}}du.$

Soient $p+q=2t$, $p-q=2r$, d'où $p=t+r$, $q=t-r$, on a :

$$\mathrm{B}(t+r,\,t-r)=2\int_{0}^{\infty}\frac{e^{2ru}+e^{-2ru}}{(e^{u}+e^{-u})^{2t}}du.$$

*Corollaire.* Désignons les cosinus hyperboliques par Cos., on a :

$$\mathrm{Cos}\,u=\frac{e^{u}+e^{-u}}{2};$$

par là, l'équation précédente devient :

$$\mathrm{B}(t+r,\,t-r)=\frac{1}{4^{t-1}}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Cos}\,2ru}{\mathrm{Cos}^{2t}u}du.$$

Or, si entre l'arc d'hyberbolique $u$, et l'arc circulaire $y$, existent les relations que *Gudermann* désigne par

$$u=\mathrm{L}y,\quad y=lu.$$

(Voyez *Potenzial-Rechnung*, par Gudermann, p. 42, 53).

on a : $\mathrm{Cos}\,u=\dfrac{1}{\cos y}$, $du=d\,\mathrm{L}y=\dfrac{dy}{\cos y}$, $y=\left\{\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$, pour $u=\left\{\begin{matrix}\infty\\ 0\end{matrix}\right.$;

par là, l'expression précédente devient :

$$\mathrm{B}(t+r,\,t-r)=\frac{1}{4^{t-1}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2t-1}y\,dy}{\cos 2ry}. \tag{10}$$

### 6me Théorème.

$$\mathrm{B}(p+1,\,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q);\quad \mathrm{B}(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q). \tag{11}$$

*Démonstration.* On a :

$$d[x^{p}(1-x)^{q}]=px^{p-1}(1-x)^{q-1}dx-(p+q)x^{p}(1-x)^{q-1}dx;$$

en intégrant il vient :

$$x^{p}(1-x)^{q}=p\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx-(p+q)\int x^{p}(1-x)^{q-1}dx.$$

En prenant les intégrales entre 0 et 1, le premier membre disparaitra aux deux limites, et l'on a :

$$0 = p\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx - (p+q)\int_0^1 x^{p}(1-x)^{q-1}dx,$$

$$0 = p\,\mathrm{B}(p,q) - (p+q)\,\mathrm{B}(p+1,q);$$

d'où l'on tire : $\mathrm{B}(p+1,q) = \dfrac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$.

*Corollaire* 1. Cette égalité donne successivement :

$$\mathrm{B}(p+1,q) = \frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q),$$

$$\mathrm{B}(p+2,q) = \frac{p+1}{p+q+1}\mathrm{B}(p+1,q),$$

etc.

$$\mathrm{B}(p+m,q) = \frac{p+m-1}{p+q+m-1}\mathrm{B}(p+m-1,q);$$

$m$ est entier et positif.

Donc, en multipliant :

$$\mathrm{B}(p+m,q) = \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+m-1)}\cdot\mathrm{B}(p,q). \qquad (12)$$

Cette formule est due à Stirling.

*Coroll.* 2. Pour $p=1$, on a $\mathrm{B}(q,1) = \int_0^1 x^{q-1}dx(1-x)^0 = \dfrac{1}{q}$; donc :

$$\mathrm{B}(m+1,q) = \frac{1\cdot2\ldots m}{q(q+1)\ldots(q+m)}, \quad \mathrm{B}(m,q) = \frac{1\cdot2\ldots m-1}{q(q+1)\ldots(q+m-1)}.$$

*Corollaire* 3. $n$ étant entier, remplaçons dans (12), $q$ par $q+n$, on aura :

$$\mathrm{B}(p+m,q+n) = \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)}{(p+q+n)(p+q+n+1)\ldots(p+q+n+m-1)}\cdot\mathrm{B}(p,q+m),$$

$$\mathrm{B}(p,q+n) = \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+n-1)}\cdot\mathrm{B}(p,q);$$

donc :

$$\mathrm{B}(p+m,q+n) = \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)\cdot q(q+1)\ldots(q+n-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots p+q+m+n-1)}\cdot\mathrm{B}(p,q). \qquad (13)$$

*Corollaire* 4. Soient $p-m>0, q-n>0$, remplaçons dans cette formule $p$ et $q$ par $p-m, q-n$, on aura :

$$B(p-m,q-n)=\frac{(p+q-1)(p+q-2)\dots(p+q-m-1)}{(p-1)(p-2)\dots(p-m)\cdot(q-1)(q-2)\dots(q-n)}\cdot B(p,q). \quad (14)$$

On trouve aussi, $k$ étant entier :

$$B(p+n+k,q-n)=\frac{p(p+1)\dots(p+n+k-1)}{(q-1)(q-2)\dots(q-n)\cdot(p+q)(p+q+1)\dots(p+q+n-1)}\cdot B(p,q). \quad (15)$$

Toutes ces formules ont pour but de faire dépendre le calcul de $B(p,q)$, d'une fonction de la même espèce et de la forme $B(p\pm m, q\pm n)$.

## 7me Théorème.

$$\frac{B(p-a,q)}{B(p,q)}=1+\frac{aq}{p+q}+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{q(q+1)}{(p+q)(p+q+1)}+\text{etc.} \quad (16)$$

*Démonstration.* On a :

$$B(p-a,q)=\int_0^1 x^{p-a-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\cdot x^{-a},$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\,[1+x-1]^{-a},$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\left[1+a(1-x)+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}(1-x^2)+\text{etc.}\right],$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+a\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q}dx+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1}dx+\text{etc.},$$

$$=B(p,q)+aB(p,q+1)+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}B(p,q+2)+\text{etc.},$$

$$=B(p,q)+\frac{aq}{p+q}B(p,q)+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}\,\frac{q(q+1)}{(p+q)(p+q+1)}B(p,q)+\text{etc.};$$

d'où :

$$B(p-1,q)=B(p,q)\,[1+\frac{aq}{p+q}+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{q(q+1)}{(p+q)(p+q+1)}+\text{etc.}]$$

*Corollaire.* Remplaçons dans (16) $p$ par $p+r$, $a$ par $r$, il viendra :

$$\frac{B(p,q)}{B(p+r,q)}=1+\frac{rq}{p+q+r}+\frac{r(r+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{q(q+1)}{(p+q+r)(p+q+r+1)}$$
$$+\text{ etc.} \quad (17)$$

Or, en changeant dans le second membre $q$ en $r$ et $r$ en $q$, sa valeur restera la même, on a donc :

$$\frac{B(p,q)}{Bp+r,q)}=\frac{B(p,r)}{B(p+q,r)}, \qquad \text{ou :}$$

$$B(p,q)\,B(p+q,r)=B(p,r)\,B(p+r,q). \qquad (18)$$

Le premier membre de cette relation ne change pas en permutant $p$ et $q$, il doit donc en être ainsi du second membre ; donc :

$$B(p,q)\,B(p+q,r)=B(q,r)\,B(q+r,p). \qquad (19)$$

Cette relation fondamentale est due à Euler.

### 8$^{me}$ Théorème.

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (20)$$

*Démonstration.* On a, par la form. (24) du 2$^d$ livre :

$$\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-(1+z)x}dx=\Gamma(p+q)\cdot\frac{1}{(1+z)^{p+q}}.$$

Multiplions les deux membres par $z^{p-1}dz$, on a :

$$\Gamma(p+q)\int_0^\infty\frac{z^{p-1}dz}{(1+z)^{p+q}}=\int_0^\infty z^{p-1}dz\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}\cdot e^{-xz}dx,$$

$$=\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}dx\int_0^\infty z^{p-1}e^{-xz}dz,$$

$$=\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}dx\cdot\frac{\Gamma(p)}{x^p},$$

$$=\Gamma(p)\int_0^\infty x^{q-1}e^{-x}dx,$$

$$=\Gamma(p)\cdot\Gamma(q);$$

donc $$\int_0^{\infty} \frac{z^{p-1}dz}{(1+z)^{p+q}} = B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (20')$$

La formule (20) fait dépendre le calcul des fonctions B, de celui des fonctions gamma.

*Corollaire.* On a : $$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$B(p+q,r) = \frac{\Gamma(p+q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)};$$

donc, en multipliant :

$$B(p,q)\,B(p+q,r) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

En général :

$$B(p,q)\cdot B(p+q,r)\ldots B(p+q+r+\ldots,n) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\ldots\,\Gamma(n)}{\Gamma(p+q+r+\ldots+n)}. \quad (21)$$

## 2me SECTION.

## PRINCIPES ET APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS GAMMA.

Nous avons déjà vu, dans le 1er livre, que les fonctions gamma, ou intégrales eulériennes de la 2de espèce, étaient définies par la formule

$$\int_0^1 [l\cdot\frac{1}{x}]^{\mu-1}dx = \int_0^{\infty} x^{\mu-1}e^{-x}dx = \Gamma(\mu), \qquad (22)$$

$\mu$ étant un nombre essentiellement positif.

Nous avons trouvé aussi la relation

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}}, \qquad (23)$$

$a$ étant positif, réel ou imaginaire. Dans le cas où $\mu$ est un nombre entier $n$, on a :

$$\Gamma(n) = 1,2,3\ldots(n-1); \qquad (24)$$
$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1. \qquad (25)$$

M. Cauchy, a donné dans le tom. II des *Exercices d'analyse*, page 378, une nouvelle déduction des principales relations de la doctrine des fonctions gamma ; nous avons puisé dans cette source

la manière d'exposer les formules les plus remarquables de cette théorie.

### 1er Théorème.

$$\Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma(\mu). \qquad (26)$$

*Démonstration.* On a par définition :

$$\Gamma(\mu+1)=\int_0^\infty x^\mu e^{-x}dx. \qquad (\alpha$$

L'intégration par parties donne :

$$\int x^\mu e^{-x}dx=-x^\mu e^{-x}+\mu\int x^{\mu-1}e^{-x}dx;$$

d'où : $$\int_0^\infty x^\mu e^{-x}dx=\mu\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx.$$

En substituant ici les valeurs ($\alpha$ et (22), on a :

$$\Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma(\mu).$$

*Corollaire.* On a par la form. (26) :

$$\Gamma(\mu+n-1+1)=(\mu+n-1)\Gamma(\mu+n-1). \qquad (27)$$

Si $n$ est un nombre entier et positif, en posant

$$n=1, 2, 3, \ldots n,$$

on aura, par (27) :

$$\Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma(\mu),$$
$$\Gamma(\mu+2)=(\mu+1)\Gamma(\mu+1),$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$\Gamma(\mu+n)=(\mu+n-1)\Gamma(\mu+n-1);$$

d'où l'on tire en multipliant :

$$\Gamma(\mu+n)=\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)\Gamma(\mu). \qquad (28)$$

La form. (28) fait dépendre le calcul de $\Gamma(\mu+n)$, de celui de $\Gamma(\mu)$; donc si on connaît les $\Gamma(\mu)$, pour toutes les valeurs de $\mu$ comprises entre 0 et 1, on pourra calculer, à l'aide de ces gamma, et de la formule précédente, la valeur de $\Gamma$ pour tout nombre $>1$; il suffit donc d'avoir une table des fonctions gamma s'étendant de $\mu=0$, à $\mu=1$.

2^me THÉORÈME.

$$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)=\frac{\pi}{\sin\mu\pi},\quad 0<\mu<1. \qquad (29)$$

*Démonstration.* Nous avons par la form. (20′) :

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Fesons $p=\mu$, $q=1-\mu$, $p+q=1$; on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{1+x}=\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu).$$

Mais on a par la form. (56) du 2^me liv. :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin\mu\pi},\quad 0<\mu<1;$$

donc $\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)=\dfrac{\pi}{\sin\mu\pi}$, $0<\mu<1$.

*Corollaire* 1. Pour $\mu=\frac{1}{2}$, on a $\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})=\dfrac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi}$; ou

$$[\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2=\pi,\quad \text{d'où :}\quad \Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}. \qquad (30)$$

Pour la même valeur de $\mu$, la form. (28) donne :

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2})=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}; \qquad (31)$$

d'où : $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{5}{2})=\dfrac{1\cdot3}{2^2}\sqrt{\pi}$, etc.

Si l'on pose $\mu=1$, on trouve $\Gamma(0)=\dfrac{\pi}{0}=\infty$.

*Corollaire* 2. Soit $e^{-ax^2}=z$, on aura :

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\int_0^\infty \left(l\frac{1}{z}\right)^{\frac{2n-1}{2}}dz,$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right),$$

$$=\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}a^{n+\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\pi}. \qquad (32)$$

Pour $n=0$, on tire de celle-ci :

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,; \qquad (33)$$

pour $a=1$, cette dernière devient :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,. \qquad (34)$$

*Coroll.* 3. Si dans la form. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,

on pose $p=n+\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $n$ étant entier, on aura :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{1-x}}dx=\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}.$$

Fesons $x=z^2$, il vient la formule connue de Wallis :

$$\int_0^1 \frac{z^{2n}dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1\cdot3\cdot5\ \dots\ (2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ \dots\ (2n)}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (35)$$

Si l'on pose $p=n+1$, $q=\frac{1}{2}$, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x}}=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}\,; \quad \text{d'où :}$$

$$\int_0^1 \frac{z^{2n+1}dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{2\cdot4\ \dots\ (2n)}{3\cdot5\ \dots\ (2n+1)}. \qquad (36)$$

### 3me Théorème.

*Soient* $\mu$ *un nombre positif,* n *un entier positif, en posant, pour abréger,*

$$F(\mu)=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\dots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(n\mu)}, \qquad (\alpha)$$

*je dis que l'on aura :*

$$F(\mu+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}F(\mu). \qquad (\beta)$$

*Démonstration.* En effet, changeons dans ($\alpha$) $\mu$ en $\mu+\frac{1}{n}$, on aura :

$$F(\mu+\frac{1}{n})=\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n\mu+1)},$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})\times\mu\Gamma(\mu)}{n\mu\Gamma(n\mu)},$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(n\mu)},$$

$$=\frac{1}{n}F(\mu).$$

*Corollaire.* $a$ et $b$ désignant des constantes indépendantes de $\mu$, et par suite des fonctions de $n$, on pourra poser

$$F(\mu)=b\cdot a^{\mu}.$$

Donc, à cause de ($\beta$) :

$$ba^{\mu+\frac{1}{n}}=\frac{b\cdot a^{\mu}}{n};\quad \text{d'où}\quad a=\frac{1}{n^{n}},\quad a^{\mu}=\frac{1}{n^{n\mu}},$$

$$F(\mu)=\frac{b}{n^{n\mu}}.\qquad (\gamma)$$

4$^{me}$ THÉORÈME.

$$\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\mu)}=\frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2\mu}}\qquad (37)$$

*Démonstration.* Fesons dans ($\gamma$) $n=2$, il vient :

$$\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\mu)}=\frac{b}{2^{2\mu}}.\qquad (\delta)$$

Déterminons la valeur de la constante $b$, correspondant à cette valeur particulière de $n$; pour cela, $b$ étant indépendant de $\mu$, prenons $\mu=\frac{1}{2}$; on aura :

$$\frac{b}{2}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(1)}=\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi};\ \text{donc}\ b=2\sqrt{\pi};$$

en substituant dans ($\delta$), on a la formule cherchée (37).

5me Théorème.

n *étant un nombre entier positif*, $\mu$ *un nombre positif, je dis qu'on a :*

$$\Gamma(\mu)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\Gamma(n\mu)}{n^{n\mu}}\sqrt{n(2\pi)^{n-1}}. \qquad (38)$$

*Démonstration.* On a, par la relation ($\gamma$) du 3me théorème :

$$n^{n\mu}\Gamma(\mu)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)=b\Gamma(n\mu).$$

Remplaçons $\mu$ par $\mu+\frac{1}{2n}$, il vient :

$$n^{n\mu+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2n}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{2n-1}{n}\right)=b\Gamma\left(n\mu+\tfrac{1}{2}\right).$$

Multiplions ces deux égalités, on a :

$$n^{2n\mu+\frac{1}{2}}\Gamma(\mu)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{2}{2n}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2n}\right)\ldots$$
$$\Gamma\left(\mu+\frac{2n-2}{2n}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{2n-1}{2n}\right)=b^2\Gamma(n\mu)\Gamma\left(n\mu+\frac{n}{2n}\right).$$

Les arguments des $2n$ fonct. $\Gamma$ du 1er membre sont respectivement :

$$\mu,\ \mu+\frac{1}{2n},\ldots\mu+\frac{n-1}{2n};\ \mu+\frac{n}{2n},\ \mu+\frac{n+1}{2n},\ \mu+\frac{n+2}{2n},\ldots\ \mu+\frac{2n-1}{2n};$$

ou :

$$\mu,\ \mu+\frac{1}{2n},\ \ldots\ \mu+\frac{n-1}{2n},\ \mu+\tfrac{1}{2},\ \mu+\frac{1}{2n}+\tfrac{1}{2},\ \mu+\frac{2}{2n}+\tfrac{1}{2},\ \ldots$$
$$\mu+\frac{2n-1}{2n}.$$

On peut donc écrire l'équation précédente de cette manière :

$$n^{2n\mu+\frac{1}{2}}\Gamma(\mu)\Gamma\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\times\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2n}+\tfrac{1}{2}\right)\times$$
$$\Gamma\left(\mu+\frac{2}{2n}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{2}{2n}+\tfrac{1}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{2n}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{2n}+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$=b^2\Gamma(n\mu)\Gamma\left(n\mu+\tfrac{1}{2}\right). \qquad (a)$$

Mais on a par (37) :

$$\Gamma(q)\Gamma(q+\tfrac{1}{2})=\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2q)}{2^{2}};$$

donc, en posant ici

$$q=\mu,\ \mu+\frac{1}{2n},\ \mu+\frac{2}{2n},\ \ldots,\ \mu+\frac{n-1}{2n},\ n\mu,$$

et en substituant les résultats dans ($a$), il vient :

$$n^{2n\mu+\frac{1}{2}}\cdot\frac{(2\sqrt{\pi})^{n}\Gamma(2\mu)\Gamma(2\mu+\frac{1}{n})\Gamma(2\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(2\mu+\frac{n-1}{n})}{2^{2n\mu}\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$=b^{2}\cdot\frac{(2\sqrt{\pi})\,\Gamma(2\mu n)}{2^{2n\mu}}.$$

Mais à cause de la form. ($\gamma$), 3$^{me}$ théorème, on a :

$$\Gamma(2\mu)\Gamma(2\mu+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(2\mu+\frac{n-1}{n})=\frac{b\,\Gamma(2n\mu)}{n^{2n\mu}};$$

par là l'équation précédente devient :

$$\frac{n^{2n\mu+\frac{1}{2}}\cdot(2\sqrt{\pi})^{n}\cdot\frac{b\,\Gamma(2n\mu)}{n^{2n\mu}}}{2^{2n\mu}\cdot 2^{\frac{n-1}{n}}}=b^{2}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n\mu)}{2^{2n\mu}};$$

d'où l'on tire, en réduisant :

$$b=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}.\qquad(\varepsilon)$$

En substituant cette valeur dans la relation ($\gamma$), il vient :

$$F(\mu)=\frac{b}{n^{n\mu}}=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}}{n^{n\mu}};$$

ou, en mettant pour $F(\mu)$ sa valeur ($\alpha$), on trouve immédiatement la formule cherchée (38).

La formule (38) est due à Gauss (*Mémoire de Göttingue*, 1812).

La démonstration précédente est empruntée au Mémoire, déjà cité, de M. Binet, page 208. Cette célèbre formule a été diversement démontrée par Legendre (*Exercices de Calcul intégral*, 1814); Cauchy (*Exercices de Mathématique*, 15$^{e}$ liv., 1827, p. 91); idem (*Exercices d'analyse*, tom. II, 1841, pag. 408); Lejeune-Dirichlet (*Journal de Crelle*, tom. 15, p. 258 et suiv.)

*Corollaire.* Pour $\mu=0$, la form. (38) se réduit a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{n(2\pi)^{n-1}}. \qquad (39)$$

6^me^ Théorème.

*$\mu$ étant un nombre positif,* n *entier et positif, je dis que l'on a les relations :*

$$(40)\quad \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-n}{2}\right)=\Gamma(\mu)+\frac{(n+1)n}{2}\Gamma(\mu-1)+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4}\Gamma(\mu-2)+\text{etc.},$$

$$(41)\quad \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right)=\Gamma(\mu)+\frac{n(n-1)}{2}\Gamma(\mu-1)+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4}\Gamma(\mu-2)+\text{etc.}$$

*Démonst.* 1° Soit $\varphi\left(cx+\frac{a}{x}\right)=\frac{1}{\left(b+cx+\frac{a}{x}\right)^u}$, on aura :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\left(b+cx+\frac{a}{x}\right)^u}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+b+2\sqrt{ac})^u},$$

[Voir la form. ( ) du 1^er^ liv.], donc :

$$\int_0^\infty \frac{d^n}{da^n}\left[\frac{dx}{\sqrt{x}\left(b+cx+\frac{a}{x}\right)^u}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{d^n}{da^n}\left[\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+b+2\sqrt{ac})^u}\right]. \qquad (\alpha)$$

Mais on a, en général :

$$\frac{d^n}{dv^n}\left[\frac{1}{(b+v)^u}\right]=(-1)^n\frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{(b+v)^{u+n}}$$

$$=\frac{\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}\cdot\frac{(-1)^n}{(b+v)^{u+n}}.$$

Donc, pour $v = cx + \frac{a}{x}$, $dv^n = \frac{da^n}{x^n}$, on a :

$$\frac{d^n}{da^n}\left[\frac{1}{(b+cx+\frac{a}{x})^u}\right] = \frac{(-1)^n\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)} \cdot \frac{x^u}{(a+bx+cx^2)^{u+n}};$$

par là ($\alpha$) devient :

$$\int_0^\infty \frac{d^n}{da^n}\left[\frac{dx}{\sqrt{x}(b+cx+\frac{a}{x})^u}\right] = \frac{(-1)^n\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}\int_0^\infty \frac{x^{u-\frac{1}{2}}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n}}. \quad (\beta)$$

D'un autre côté on a, par la form. (61) du 1[er] livre :

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d^n}{da^n}\left[\frac{1}{(x+b+2\sqrt{ac})^u}\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}} - \right.$$

$$\frac{n(n-1)}{2(2\sqrt{ac})}\int_0^\infty \varphi^{(n-1)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}} +$$

$$\left.\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4\,(2\sqrt{ac})^2}\int_0^\infty \varphi^{(n-2)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}} - \text{etc.}\right] \quad (\gamma)$$

Or, on a $\varphi(x+2\sqrt{ac}) = \frac{1}{(x+b+2\sqrt{ac})^u}$; donc :

$$\varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac}) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{(x+b+2\sqrt{ac})^u}\right] =$$

$$(-1)^n\frac{\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)} \cdot \frac{1}{(x+b+2\sqrt{ac})^{u+n}};$$

d'où :

$$\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}} = (-1)^n\frac{\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+b+2\sqrt{ac})^{u+n}}. \quad (\delta)$$

Soit $x = (b+2\sqrt{ac})y$, il vient :

$$\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{(-1)^n\Gamma(u+n)}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}}\Gamma(u)}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}dy}{(1+y)^{u+n}}. \quad (\varepsilon)$$

Fesons dans la formule

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$p=\frac{1}{2}$, $q=n+u-\frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, on a :

$$\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}dy}{(1+y)^{u+n}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+u-\frac{1}{2})}{\Gamma(u+n)};$$

donc ($\varepsilon$) devient :

$$\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+u-\frac{1}{2})}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}}\Gamma(u)}. \qquad (\eta)$$

Donc si à la place du premier membre de ($\gamma$) on met sa valeur ($\beta$), et à la place des divers termes du second membre, ce qui devient ($\eta$), en y remplaçant $n$ successivement par $n, n-1, n-2$, etc., on aura :

$$\Gamma(u+n)\int_0^\infty \frac{x^{u-\frac{1}{2}}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n}} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\left\{\frac{\Gamma(n+u-\frac{1}{2})}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\frac{n(n-1)}{2(2\sqrt{ac})}\cdot\frac{\Gamma(n+u-\frac{1}{2}-1)}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}}} +$$

$$\left.\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4(2\sqrt{ac})^2}\cdot\frac{\Gamma(n+u-\frac{1}{2}-2)}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}-2}} + \text{etc.}\right\}$$

En fesant dans cette dernière $n+u-\frac{1}{2}=\mu$, elle devient :

$$\text{(A)} \quad \Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\sqrt{\frac{c}{\pi}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty \frac{x^{\mu-n}dx}{(a+bx+cx^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{\Gamma(\mu)}{(b+2\sqrt{ac})^{\mu}} + \frac{n(n-1)}{2(2\sqrt{ac})}\cdot\frac{\Gamma(\mu-1)}{(b+2\sqrt{ac})^{\mu-1}} +$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4(2\sqrt{ac})^2}\cdot\frac{\Gamma(\mu-2)}{(b+2\sqrt{ac})^{\mu-2}} + \text{etc.}$$

2° Soit toujours $\varphi(cx+\frac{a}{x})=\frac{1}{(b+cx+\frac{a}{x})^u}$ ; donc

$\varphi(x+2\sqrt{ac})=\frac{1}{(b+2\sqrt{ac}+x)^u}$ on aura :

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(b+cx+\frac{a}{x})^u}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+b+2\sqrt{ac})^u}.$$

En différentiant celles-ci $n$ fois de suite par rapport à c, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{d^n}{dc^n}\left[\frac{dx}{\sqrt{x}\,(b+cx+\frac{a}{x})^u}\right]=\int_0^\infty \frac{d^n}{dc^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\left[\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+b+2\sqrt{ac})^u}\right]. \qquad (\zeta)$$

Mais on a :

$$\frac{d^n}{dc^n}\left[\frac{1}{(b+cx+\frac{a}{x})^u}\right]=(-1)^n\frac{\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}\cdot\frac{x^n}{(b+\frac{a}{x}+cx)^{u+n}};$$

donc :

$$\int_0^\infty \frac{d^n}{dc^n}\left[\frac{dx}{\sqrt{x}\,(b+cx+\frac{a}{x})^u}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}\int_0^\infty \frac{x^{2n+u}dx}{\sqrt{x}\,(a+bx+cx^2)^{u+n}}. \qquad (\theta)$$

Le second membre de ($\zeta$) est donné par la form. (63) du 1er livre, en vertu de laquelle nous avons :

$$(\lambda) \qquad (-1)^n\frac{\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}\int_0^\infty \frac{x^{2n+u-\frac{1}{2}}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{2}}\Big[\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}-\frac{(n+1)n}{2(2\sqrt{ac})}\int_0^\infty \varphi^{(n-1)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot4(2\sqrt{ac})^2}\int_0^\infty \varphi^{(n-2)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}-\text{etc.}\Big]$$

Mais on a, par la form. ($\nu$) :

$$\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{(-1)^n\Gamma(n+u-\frac{1}{2})}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}}\Gamma(u)} ;$$

donc, en fesant ici, $n$ successivement égal à $n, n-1, n-2$, etc. ($\lambda$) devient, en opérant comme ci-dessus :

$$(B) \quad \Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\sqrt{\frac{c}{\pi}}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty \frac{x^{\mu+n}dx}{(a+bx+cx^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{\Gamma(\mu)}{(b+2\sqrt{ac})^\mu} + \frac{(n+1)n}{2(2\sqrt{ac})}\cdot\frac{\Gamma(\mu-1)}{(b+2\sqrt{ac})^{\mu-1}} +$$
$$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4(\sqrt{ac})^2}\,\frac{\Gamma(\mu-2)}{(b+2\sqrt{ac})^{\mu-2}} + \text{etc.}$$

Si dans les formules (A) et (B) on fait $a=1, b=0, c=1$, elles se changeront en :

$$(a) \quad \Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^{\mu-n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\mu)}{2^\mu} + \frac{n(n-1)}{2^2\cdot 2^{\mu-1}}\Gamma(\mu-1) +$$
$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4\cdot 2^2\cdot 2^{\mu-2}}\Gamma(\mu-2) + \text{etc.},$$

$$(b) \quad \Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^{\mu+n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\mu)}{2^\mu} + \frac{(n+1)n}{2^2\cdot 2^{\mu-1}}\Gamma(\mu-1) +$$
$$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4\cdot 2^2\cdot 2^{\mu-2}}\Gamma(\mu-2) + \text{etc.}$$

Fesons dans ($b$) $x^2=r$, on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu+1}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{r^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}-1}dr}{(1+r)^{\mu+\frac{1}{2}}} . \qquad (k)$$

Si l'on compare cette intégrale à la suivante :

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} ,$$

on devra faire $p=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}=\dfrac{\mu+n+1}{2}$,

$$q=\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}n=\frac{\mu-n}{2} ,$$

et alors (*b*) devient :

$$\frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-n}{2}\right)=\Gamma(\mu)+\frac{(n+1)n}{2}\Gamma(\mu-1)+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4}\Gamma(\mu-2)+\text{etc.}$$

Des substitutions entièrement semblables changeront (*a*) en :

$$\frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right)=\Gamma(\mu)+\frac{n(n-1)}{2}\Gamma(\mu-1)+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4}\Gamma(\mu-2)+\text{etc.},$$

formule qui se déduit de la précédente en *y* changeant *n* en $-n$.

### 7^me^ Théorème.

*$\mu$ étant positif,* n *un nombre entier et positif, je dis que l'on a les relations :*

$$(42)\quad \Gamma(\mu)=\frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu-n+1}{2}\right)\left\{\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right)-\frac{n(n-1)}{2\cdot 2^2}\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}-1\right)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 2^4}\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}-2\right)-\text{etc.}\right\}$$

$$(43)\quad \Gamma(\mu)=\frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu-n}{2}\right)\left\{\Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}\right)-\frac{(n+1)n}{1\cdot 2^2}\Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}-1\right)+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 2^4}\Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}-2\right)-\text{etc.}\right\}$$

*Démonstration.* 1° Soit $\varphi\left(cx+\frac{a}{x}\right)=\frac{1}{\left(b+cx+\frac{a}{x}\right)}$, et par suite : $\varphi(x+2\sqrt{ac})=\frac{1}{(b+x+2\sqrt{ac})^u}$, on aura :

$$\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+u-\frac{1}{2})}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}}\Gamma(u)},$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n}\varphi^{(n)}\left(cx+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{(-1)^n\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}\int_0^\infty\frac{x^{u-\frac{1}{2}}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n}}.$$

Donc, à cause de la form. 58 du 1[er] livre, on a :

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+u-\frac{1}{2})}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}}}=\sqrt{c}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{2}}\left\{\Gamma(u+n)\int_0^\infty\frac{x^{u-\frac{1}{2}}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n}}-\right.$$

$$\frac{n(n-1)}{(2\sqrt{a})^2}\Gamma(u+n-1)\int_0^\infty\frac{x^{u-\frac{1}{2}}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n-1}}+$$

$$\left.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2(2\sqrt{a})^4}\Gamma(u+n-2)\int_0^\infty\frac{x^{u-\frac{1}{2}}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n-2}}-\text{etc.}\right\}$$

Soient $a=1$, $b=0$, $c=1$, $u+n-\frac{1}{2}=\mu$, il vient :

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu)}{2^\mu}=\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\int_0^\infty\frac{x^{\mu-n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}-$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2^2}\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2}-1)\int_0^\infty\frac{x^{\mu-n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}-1}}+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2(2)^4}\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2}-2)\int_0^\infty\frac{x^{\mu-n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}-2}}-\text{etc.}$$

Les intégrales du second membre se déterminent par le procédé déjà employé, savoir en posant $x^2=r$, on aura :

$$\int_0^\infty\frac{x^{\mu-n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{r^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}-1}dr}{(1+r)^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma(\frac{\mu-n+1}{2})\Gamma(\frac{\mu+n}{2})}{2\Gamma(\mu+\frac{1}{2})},$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{\mu-n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}-1}}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{r^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}-1}dr}{(1+r)^{\mu+\frac{1}{2}-1}}=$$

$$\frac{\Gamma(\frac{\mu-n+1}{2})\Gamma(\frac{\mu+n}{2}-1)}{2\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-1)},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}-2}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{r^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}-2}dr}{(1+r)^{\mu+\frac{1}{2}-2}} =$$

$$\frac{\Gamma(\frac{\mu-n+1}{2})\Gamma(\frac{\mu+n}{2}-2)}{2\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-2)}, \text{ etc.}$$

Par là l'égalité précédente devient :

$$\Gamma(\mu) = \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{\mu-n+1}{2})\Big\{\Gamma(\frac{\mu+n}{2}) - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2^2}\Gamma(\frac{\mu+n}{2}-1) +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 2^4}\Gamma(\frac{\mu+n}{2}-2) - \text{etc.}\Big\}$$

2° Soit toujours $\varphi(cx+\frac{a}{x}) = \frac{1}{(b+cx+\frac{a}{x})^u}$,

$\varphi(x+2\sqrt{ac}) = \frac{1}{(b+2\sqrt{ac}+x)^u}$, d'où :

$$\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+u-\frac{1}{2})}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}}\Gamma(u)},$$

$$\int_0^\infty x^n\varphi^{(n)}(cx+\frac{a}{x})\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{(-1)^n\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}\int_0^\infty \frac{x^{2n+u-\frac{1}{2}}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n}},$$

on trouve, par la form. (60) du 1er livre :

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+u-\frac{1}{2})}{(b+2\sqrt{ac})^{u+n-\frac{1}{2}}} = \sqrt{c}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\Big\{\Gamma(u+n)\int_0^\infty \frac{x^{2n+u-\frac{1}{2}}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n}} -$$

$$\frac{(n+1)n}{1\cdot(2\sqrt{c})^2}\Gamma(u+n-1)\int_0^\infty \frac{x^{2n+u-\frac{1}{2}-2}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n-1}} +$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2(2c)^4}\Gamma(u+n-2)\int_0^\infty \frac{x^{2n+u-\frac{1}{2}-4}dx}{(a+bx+cx^2)^{u+n-2}} - \text{etc.}\Big\}$$

Fesons $n+u-\frac{1}{2}=\mu$, $a=1$, $c=1$, $b=0$, celle-ci devient :

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu)}{2^\mu}=\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\int_0^\infty\frac{x^{\mu+n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}-$$

$$\frac{(n+1)n}{1\cdot 2^2}\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2}-1)\int_0^\infty\frac{x^{\mu+n-2}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}-1}}+$$

$$\left.\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 2^4}\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2}-2)\int_0^\infty\frac{x^{\mu+n-4}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}-2}}-\text{etc.}\right\}$$

En posant $x^2=r$, et en déterminant comme ci-haut les intégrales du second membre de cette dernière, savoir :

$$\int_0^\infty\frac{x^{\mu+n}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{r^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}-1}dr}{(1+r)^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma(\frac{\mu+n+1}{2})\Gamma(\frac{\mu-n}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})},$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{\mu+n-2}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}-1}}=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{r^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}n-1+\frac{1}{2}-1}dr}{(1+r)^{\mu+\frac{1}{2}-1}}=$$

$$\frac{\Gamma(\frac{\mu+n+1}{2}-1)\Gamma(\frac{\mu-n}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-1)},$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{\mu+n-4}dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}-2}}=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{r^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}n-2+\frac{1}{2}-1}dr}{(1+r)^{\mu+\frac{1}{2}-2}}=$$

$$\frac{\Gamma(\frac{\mu+n+1}{2}-2)\,\Gamma(\frac{\mu-n}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-2)},$$

etc.,

elle devient :

$$\Gamma(\mu)=\frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{\mu-n}{2})\left\{\Gamma(\frac{\mu+n+1}{2})-\frac{(n+1)n}{1\cdot 2^2}\Gamma(\frac{\mu+n+1}{2}-1)+\right.$$

$$\left.\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 2^4}\Gamma(\frac{\mu+n+1}{2}-2)-\text{etc.}\right\}$$

*Remarque.* Si dans la form. (61′) du 2^me livre, on pose :

$$f(x)=x^{2p+1}(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}-1}, \quad A_{2n+2}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{2p-2n-2}(1-x^2)^{q-1}2xdx,$$

on aura, pour $x^2=y$,

$$A_{2n+2}=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{p-n-1}(1-y)^{q-1}dy=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(p-n)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q-n)}. \qquad (\alpha)$$

On a de de plus :

$$\int_0^\infty x^{2m}f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=\int_0^\infty x^{2m}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{2p+1}\left[1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2\right]^{q+\frac{1}{2}-1}$$

$$=2^{2p}\int_0^\infty x^{2m+2p}\cdot\frac{(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^{2p+2q}}2xdx=2^{2p}\int_0^\infty\frac{(1-z)^{q-\frac{1}{2}}}{(1+z)^{2p+2q}}z^{p+m}dz;$$

On a donc, par la form. (61′) du 2^me livre :

$$\frac{(-1)^m 2^{2p}}{2m+1}\int_0^\infty\frac{(1-x)^{q-\frac{1}{2}}}{(1+x)^{2p+2q}}x^{p+m}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}-$$

$$2^2\frac{(m+1)m}{2\cdot3}\frac{\Gamma(p-1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q-1)}+2^4\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\frac{\Gamma(p-2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q-2)}$$

$$-\text{ etc.}$$

Pour $q=\frac{1}{2}$, $\Gamma(q)=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, le premier membre s'intègre, et il vient :

$$\frac{(-1)^m 2^{2p}}{(2m+1)\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(p+m+1)\Gamma(p-m)}{\Gamma(2p+1)}=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}-$$

$$\frac{(m+1)m}{2\cdot3}\cdot\frac{2^2\Gamma(p-1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2}-1)}+\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{2^4\Gamma(p-2)}{\Gamma(p+\frac{1}{2}-2)}$$

$$-\text{ etc.}$$

### 8^me Théorème.

*l désignant des logarithmes népériens, je dis que l'on a :*

$$(44) \qquad \frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty\left[e^{-x}-(1+x)^{-\mu}\right]\frac{dx}{x}.$$

*Démonstration.* On a $\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx=\Gamma(\mu)$; en différentiant

par rapport à $\mu$, il vient :

$$\frac{d\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty x^{\mu-1}\,lx\,e^{-x}dx. \qquad (\alpha)$$

Cherchons une valeur pour $lx$. A cet effet on a successivement :

$$\int_0^\infty e^{-xz}dz=\frac{1}{x},$$

$$\int dx\int_0^\infty e^{-xz}dz=lx+c,$$

$$\int_1^x dx\int_0^\infty e^{-xz}dz=\int_0^\infty dz\int_1^x e^{-xz}dx=lx.$$

Substituons cette valeur de $lx$ dans $(\alpha)$, on obtient :

$$\frac{d\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}(e^{-z}-e^{-xz})\frac{dz\,dx}{z},$$

$$=\int_0^\infty\frac{e^{-z}dz}{z}\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx-\int_0^\infty\frac{dz}{z}\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-(1+z)x}dx,$$

$$=\Gamma(\mu)\int_0^\infty\Big[e^{-z}-\frac{1}{(1+z)^\mu}\Big]\frac{dz}{z}\;; \qquad \text{d'où :}$$

$$\frac{\dfrac{d\Gamma(\mu)}{d\mu}}{\Gamma(\mu)}=\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty\big[e^{-z}-(1+z)^{-\mu}\big]\frac{dz}{z}. \qquad (\beta)$$

### 9me Théorème.

$$l\Gamma(\mu)=\int_0^\infty\Big[(\mu-1)e^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\Big]\frac{dx}{x}. \qquad (45)$$

*Démonstration*. L'équation $(\beta)$ donne, en intégrant par rapport à $\mu$ entre les limites 0 et $\mu$ :

$$l\Gamma(\mu)=\int_1^\mu d\mu\int_0^\infty\frac{e^{-z}dz}{z}-\int_1^\mu d\mu\int_0^\infty(1+z)^{-\mu}\frac{dz}{z},$$

$$=\int_0^\infty (\mu-1)\frac{e^{-z}dz}{z}-\int_0^\infty \frac{dz}{z}\int_1^\mu (1+z)^{-\mu}\,d\mu\,;$$

mais on a :

$$\int(1+z)^{-\mu}d\mu=-\frac{1}{l(1+z)}(1+z)^{-\mu}+c\,,$$

donc :

$$l\Gamma(\mu)=\int_0^\infty \left\{(\mu-1)e^{-z}-\frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-\mu}}{l(1+z)}\right\}\frac{dz}{z}. \qquad (\alpha)$$

Débarrassons cette expression de l'exponentielle $e^{-z}$; à cet effet, on a, pour $\mu=2$, $l\Gamma(\mu)=l\Gamma(2)=l(1)=0$; donc $(\alpha)$ devient :

$$0=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-z}}{z}-\frac{(1+z)^{-2}}{l(1+z)}\right]dz. \qquad (46)$$

Multiplions celle-ci par $-(\mu-1)$, puis ajoutons le résultat à $(\alpha)$, on aura :

$$l\Gamma(\mu)=\int_0^\infty\left\{(\mu-1)(1+z)^{-2}-\frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-\mu}}{z}\right\}\frac{dz}{l(1+z)}. \quad (\beta)$$

Fesons partir de celle-ci $l(1+z)$; pour cela posons

$$l(1+z)=x,\ 1+z=e^x,\ z=e^x-1\,,$$

les limites ne changeront pas, et l'on aura, à la place de $(\beta)$ :

$$l\Gamma(\mu)=\int_0^\infty\left[(\mu-1)e^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}.$$

*Corollaire* 1. En différentiant cette dernière par rapport à $\mu$, on aura :

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\right]dx. \qquad (47)$$

On peut donner à cette expression une autre forme, en posant

$$e^{-x}=z,\ dx=-\frac{dz}{z},\ x=-lz\,;$$

alors aux limites $x=\left\{\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix}\right.$, répondront les limites $z=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$,

et on aura :

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_1^0\left[\frac{z}{lz}-\frac{z^\mu}{1-z}\right]\frac{dz}{z},$$

$$=-\int_0^1\left[\frac{1}{lz}-\frac{z^{\mu-1}}{1-z}\right]dz.$$

Cette expression peut être simplifiée, en ajoutant et en retranchant dans les parenthèses $\frac{1}{1-z}$, car alors on obtient :

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=-\int_0^1\left[\frac{1}{lz}-\frac{1}{1-z}\right]dz+\int_0^1\frac{1-z^{\mu-1}}{1-z}\cdot dz.$$

Euler a trouvé $\int_0^1\left[\frac{1}{lz}-\frac{1}{1-z}\right]dz=0{,}5772156\ldots$ ; désignons cette constante par $c=\frac{dl\Gamma(1)}{d(1)}$, on a :

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=-\frac{dl\Gamma(1)}{d(1)}+\int_0^1\left(\frac{1-z^{\mu-1}}{1-z}\right)dz,$$

$$=-0{,}5772156\ldots+\int_0^1\left(\frac{1-z^{\mu-1}}{1-z}\right)dz,$$

$$=-c+\int_0^1\left(\frac{1-z^{\mu-1}}{1-z}\right)dz. \qquad (48)$$

Cette formule est due à Gauss.

*Corollaire* 2. Remplaçons dans (45), $\mu$ par $\mu+1$, on trouvera :

$$l\Gamma(1+\mu)=\int_0^\infty\left[xe^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-(\mu+1)x}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}.$$

Retranchons (45) de celle-ci, il vient :

$$l\Gamma(1+\mu)-l\Gamma(\mu)=l(\mu),\quad \text{ou}\quad \Gamma(1+\mu)=\mu\Gamma(\mu).$$

On déduira aisément, ainsi que le fait M. Cauchy, page 381 du Mémoire cité, de la formule (45), les propriétés déjà établies sur les fonctions gamma.

### Problème 1.

*Décomposer* $l\Gamma(\mu)$ *en deux parties dont l'une devienne zéro pour* $\mu = \infty$.

*Solution.* On a par la form. (45) :

$$l\Gamma(\mu) = \int_0^\infty [\mu - 1 - \frac{1}{1-e^{-x}}] \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-\mu x}}{x(1-e^{-})}]dx.$$

Fesons pour abréger :

$$P = (\mu - 1 - \frac{1}{1-e^{-x}})\frac{e^{-x}}{x}, \quad Q = \frac{1}{x(1-e^{-x})},$$

on aura :

$$l\Gamma(\mu) = \int_0^\infty [P + Q\,e^{-\mu x}]\,dx.$$

Comme on a :

$$Q = \frac{e^x}{x(e^x-1)} = \frac{\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}}{x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}}$$

$$= \frac{1}{x}(\frac{1}{x} + \tfrac{1}{2}) + A + Bx + Cx^2 + \text{etc.},$$

en fesant $q = \frac{1}{x}(\frac{1}{x} + \frac{1}{2})$, partie du développement de Q qui comprend les puissances négatives de $x$, on pourra poser :

$$F(\mu) = \int_0^\infty (P + q e^{-\mu x})dx, \qquad (\alpha)$$

$$\varpi(\mu) = \int_0^\infty (Q - q)\,e^{-\mu x} dx; \qquad (\beta)$$

et alors on aura :

$$l\Gamma(\mu) = F(\mu) + \varpi(\mu); \qquad (49)$$

c'est la décomposition cherchée : en effet, la partie $\varpi(\mu)$, à cause du facteur $e^{-\mu x}$, et parce que $Q - q$, ne contient aucune puissance négative de $x$, devient zéro lorsque $\mu$ devient infini.

Les expressions développées de $\mathrm{F}(\mu)$ et de $\varpi(\mu)$ sont :

$$\mathrm{F}(\mu)=\int_0^\infty [(\mu-1-\frac{1}{1-e^{-x}})\frac{e^{-x}}{x}+\frac{1}{x}(\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2})e^{-\mu x}]\,dx\,,$$

$$=\int_0^\infty [\mu-1-\frac{1}{1-e^{-x}})e^{-x}+(\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2})e^{-\mu x}]dx\,; \qquad (50)$$

$$\varpi(\mu)=\int_0^\infty [\frac{1}{x(1-e^{-x})}-\frac{1}{x}(\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2})]e^{-\mu x}dx\,,$$

$$=\int_0^\infty [\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\tfrac{1}{2}]e^{-\mu x}\frac{dx}{x}. \qquad (51)$$

### Problème 2.

*Chercher la valeur de $\varpi(\frac{1}{2})$, et de $\mathrm{F}(\frac{1}{2})$.*

*Solution*. On a d'abord, par la form. (51) :

$$\varpi(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty [\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\tfrac{1}{2}]e^{-\frac{1}{2}x}\frac{dx}{x}\,,$$

$$=\int_0^\infty [\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{1}{2x}-\tfrac{1}{2}]\,e^{-x}\frac{dx}{x}. \qquad (\alpha)$$

On a ensuite par la form. (50) :

$$\varpi(1)=\int_0^\infty [\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\tfrac{1}{2}]e^{-x}\frac{dx}{x}\,, \qquad (\beta)$$

$$\varpi(1)=\int_0^\infty [\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{1}{2x}-\tfrac{1}{2}]e^{-2x}\frac{dx}{x}\,; \qquad (\gamma)$$

En retranchant (8) de $(\beta)$, et en observant que l'on a :

$$\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\,,$$

on obtient :

$$0=\int_0^\infty [\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{2-e^{-x}}{2x}-\frac{1-e^{-x}}{2}]e^{-x}\frac{dx}{x}. \qquad (\delta)$$

En retranchant ($\delta$) de ($\alpha$) il vient :

(52) $$\varpi(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\left[\frac{1-e^{-x}}{x}-e^{-x}\right]\frac{e^{-x}dx}{x},$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\left[\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2}-\frac{e^{-2x}}{x}\right]dx,$$

$$=\tfrac{1}{2}[1-l(2)].$$ (Voyez form. (23″), liv. 2$^{me}$.)

Pour trouver la valeur de $F(\frac{1}{2})$, on doit recourir à la form. (49) qui donne :

$$l\Gamma(\tfrac{1}{2})=F(\tfrac{1}{2})+\varpi(\tfrac{1}{2}),$$

$$\tfrac{1}{2}l\pi=F(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}l(2);$$ d'où :

$$F(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}l(2\pi)-\tfrac{1}{2}. \qquad (53)$$

### 10$^{me}$ Théorème.

$$\Gamma(\mu)=\sqrt{2\pi}\cdot\mu^{\mu-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\mu}\cdot e^{\varpi(\mu)}. \qquad (54)$$

*Solution*. On a par la form. (50) :

$$F(\mu)=\int_0^\infty\left[\left(\mu-1-\frac{1}{1-e^{-x}}\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2}\right)e^{-\mu x}\right]\frac{dx}{x};$$

donc, pour $\mu=\frac{1}{2}$,

$$F(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty\left[\left(-\tfrac{1}{2}-\frac{1}{1-e^{-x}}\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}\right]\frac{dx}{x}.$$

On tire de celles-ci par soustraction :

$$F(\mu)-F(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty\left[\left(\mu-\tfrac{1}{2}\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}+\tfrac{1}{2}\right)\left(e^{-\mu x}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]\frac{dx}{x},$$

$$=\tfrac{1}{2}-\mu+\left(\mu-\tfrac{1}{2}\right)l(\mu). \qquad (\alpha)$$

(Voyez la form. (23′) du 2$^{me}$ liv.)

Donc $$F(\mu)=F(\tfrac{1}{2})-\mu+\tfrac{1}{2}+\left(\mu-\tfrac{1}{2}\right)l(\mu).$$

En substituant ici la valeur de $F(\frac{1}{2})$, donnée par (53), il vient : $$F(\mu)=\left(\mu-\tfrac{1}{2}\right)l(\mu)-\mu+\tfrac{1}{2}l(2\pi).$$

Or, comme on a :

$$l\Gamma(\mu)=F(\mu)+\varpi(\mu),$$

on obtient :

$$l\Gamma(\mu) = (\mu - \tfrac{1}{2})\, l(\mu) - \mu + \tfrac{1}{2}\, l(2\pi) + \varpi(\mu)\,; \qquad (55)$$

donc, en passant aux nombres :

$$\Gamma(\mu) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, \mu^{\mu - \frac{1}{2}}\, e^{-\mu} \cdot e^{\varpi(\mu)}.$$

*Corollaire.* Pour $\mu = \infty$, on a $\varpi(\mu) = 0$, donc pour cette valeur de $\mu$ on a :

$$\Gamma(\mu) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, \mu^{\mu - \frac{1}{2}}\, e^{-\mu}. \qquad (56)$$

Il s'agit maintenant d'obtenir par la formule (54), une valeur numérique suffisamment approchée pour $\Gamma(\mu)$, correspondante à une valeur donnée de $\mu$. Pour cela, en prenant la formule (55), l'on voit que ce calcul dépend du développement en série convergente de la fonction $\varpi(\mu)$. On y parvient par plusieurs procédés que nous allons développer successivement.

1[er] *Développement de* $\varpi(\mu)$ *en série convergente.*

Mettons l'expression (51) sous la forme

$$\varpi(\mu) = \int_0^\infty \frac{1 - (1 - e^{-x})(\frac{1}{x} + \frac{1}{2})}{x} \cdot \frac{e^{-\mu x}}{1 - e^{-x}}\, dx. \qquad (\alpha)$$

La fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour $1 - e^{-x} = 0$, ou $e^x = 1$. Soit $x = \varsigma(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ ; alors la plus petite valeur de $x$, qui rend $e^x = 1$, correspondra à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, et par suite à $\varsigma = 2\pi$ ; donc en prenant pour $x$ une valeur dont le module soit inférieur à $2\pi$, on empêchera la fonction sous le signe $\int$ de devenir infinie, et par suite cette fonction, d'après un théorème connu de Cauchy, sera pour toutes les valeurs de $x$ dont le module est inférieur à $2\pi$, développable en série convergente. Pour effectuer ce développement on a :

$$1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \text{etc.};$$

d'où :

$$\frac{1 - (1 - e^{-x})(\frac{1}{x} + \frac{1}{2})}{x} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2 \cdot 3}x - \frac{2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4 \cdot 5} \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \text{etc.}\right);$$

donc $(\alpha)$ devient :

$$(\beta) \quad \varpi(\mu) = \tfrac{1}{2}\Big[\frac{1}{2\cdot 3}\int_0^\infty x\frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}dx - \frac{2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}\int_0^\infty x^2\cdot\frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}dx +$$

$$\frac{3}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\int_0^\infty x^3\cdot\frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\,dx - \text{etc.}\Big]$$

A l'égard des intégrations du second membre, observons que la division donne :

$$\frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x}} = e^{-\mu x} + e^{-(\mu+1)x} + e^{-(\mu+2)x} + \text{etc.};$$

on a donc :

$$\frac{1}{1\cdot 2\,..\,m}\int_0^\infty x^{\mathrm{m}}\frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}dx = \frac{1}{1\cdot 2\,..\,m}\int_0^\infty x^{\mathrm{m}}\,e^{-\mu x}dx +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\,..\,m}\int_0^\infty x^{\mathrm{m}}\,e^{-(\mu+1)x}dx + \text{etc.},$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2\,..\,m}\cdot\frac{\Gamma(m-1)}{\mu^{\mathrm{m+1}}} + \frac{1}{1\cdot 2\,..\,m}\,\frac{\Gamma(m-1)}{(\mu+1)^{\mathrm{m+1}}} + \text{etc.},$$

$$= \frac{1}{\mu^{\mathrm{m+1}}} + \frac{1}{(\mu+1)^{\mathrm{m+1}}} + \frac{1}{(\mu+2)^{\mathrm{m+1}}} + \text{etc.}$$

En fesant $m = 1, 2, 3$, etc., on obtient les valeurs des intégrales de $(\beta)$, et en substituant, cette équation devient :

$$\varpi(\mu) = \tfrac{1}{2}\Big[\frac{1}{2\cdot 3}\Big(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{(\mu+1)^2} + \frac{1}{(\mu+2)^2} + \ldots\Big) -$$

$$\frac{2}{3\cdot 4}\Big(\frac{1}{\mu^3} + \frac{1}{(\mu+1)^3} + \frac{1}{(\mu+2)^3} + \ldots\Big) +$$

$$\frac{3}{4\cdot 5}\Big(\frac{1}{\mu^4} + \frac{1}{(\mu+1)^4} + \frac{1}{(\mu+2)^4} + \text{etc.}\Big) - \text{etc.}\Big] \quad (57)$$

2$^{\text{me}}$ *Développement de* $\varpi(\mu)$ *en série convergente.*

Mettons la formule (51) sous la forme

$$\varpi(\mu) = \int_0^\infty \frac{e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{x}}{x}\cdot\frac{e^{-\mu x}}{e^x - 1}dx. \quad (\alpha)$$

Développons en série le facteur

$$\frac{e^x(\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2})+\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}{x}.$$

En partant de la suite $e^x_1=1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+$ etc., on trouve, en opérant comme ci-dessus :

$$\varpi(\mu)=\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{2\cdot 3}\Big[\frac{1}{(\mu+1)^2}+\frac{1}{(\mu+2)^2}+\ldots\Big]+$$

$$\frac{2}{3\cdot 4}\Big[\frac{1}{(\mu+1)^3}+\frac{1}{(\mu+2)^3}+\text{etc.}\Big]+\text{etc.}\Big\}. \qquad (58)$$

3[me] *Développement de* $\varpi(\mu)$ *en série convergente.*

Reprenons l'équation $(\alpha)$ du 1[er] développement, savoir :

$$\varpi(\mu)=\int_0^\infty \frac{1-(1-e^{-x})(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})}{x}\cdot\frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}dx.$$

Posons ici $1-e^{-x}=t$, $e^{-x}=1-t$, $x=-l(1-t)$,

$t=\Big\{{1 \atop 0}$, pour $x=\Big\{{\infty \atop 0}$, $dx=\frac{dt}{1-t}$, l'équat. précédente deviendra :

$$\varpi(\mu)=\int_0^1\Big[\frac{1}{t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{l(1+t)}\Big]\frac{(1+t)^{-\mu-1}}{l(1+t)}dt. \qquad (\alpha)$$

Développons en série la fonction sous le signe $\int$; pour cela on a :

$$(1-t)^\alpha=1-\alpha t-\frac{\alpha(1-\alpha)}{1\cdot 2}t^2-\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3-\text{etc.},$$

$$=1-\alpha_1 t-\alpha_2 t^2-\alpha_3 t^3-\text{etc.},\quad \alpha_m=\frac{\alpha(1-\alpha)\ldots(m-1-\alpha)}{1\cdot 2\ldots m}.$$

En multiplant par $d\alpha$, on a, en intégrant :

$$\int(1-t)^\alpha d\alpha=\int d\alpha-t\int\alpha_1 d\alpha-t^2\int\alpha_2 d\alpha-t^3\int\alpha_3 d\alpha-\text{etc.},$$

$$\frac{(1-t)^\alpha}{l(1-t)}+c=\int d\alpha-t\int\alpha_1 d\alpha-\text{etc.};$$

en prenant ces intégrales de $\alpha=0$, à $\alpha=\alpha$, on a :

$$\frac{(1-t)^{\alpha}-1}{l(1-t)}=\alpha-t\int_0^{\alpha}\alpha_1 d\alpha-t^2\int_0^{\alpha}\alpha_2 d\alpha-t^3\int_0^{\alpha}\alpha_3 d\alpha-\text{etc.}\qquad(\beta)$$

Multiplions celle-ci de nouveau par $d\alpha$, et intégrons entre 0 et $\alpha$, il vient :

$$\frac{1}{l(1-t)}\left[\frac{(1-t)^{\alpha}-1}{l(1-t)}-\alpha\right]=\frac{\alpha^2}{2}-t\int_0^{\alpha}d\alpha\int_0^{\alpha}\alpha_1 d\alpha-t^2\int_0^{\alpha}d\alpha\int_0^{\alpha}\alpha_2 d\alpha-\text{etc.}\qquad(\gamma)$$

En fesant $\alpha=1$, les formules $(\beta)$, $(\gamma)$ deviennent :

$$\frac{1}{l(1-t)}=-\frac{1}{t}+\int_0^1\alpha_1 d\alpha+t\int_0^1\alpha_2 d\alpha+\text{etc.},\qquad(\beta')$$

$$\frac{1}{l(1-t)}\left[\frac{1}{l(1-t)}+\frac{1}{t}\right]=-\frac{1}{2t}+\int_0^1 d\alpha\int_0^1\alpha_1 d\alpha+t\int_0^1 d\alpha\int_0^1\alpha_2 d\alpha+\text{etc.}\qquad(\gamma')$$

Cela posé, multiplions $(\beta')$ par $-\frac{1}{2}$, puis ajoutons au résultat l'expression $(\gamma')$, on obtient :

$$\frac{1}{l(1-t)}\left[-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{l(1-t)}+\frac{1}{t}\right]=\left[\int_0^1 d\alpha\int_0^1\alpha_1 d\alpha-\tfrac{1}{2}\int_0^1\alpha_1 d\alpha\right]+$$

$$\left[\int_0^1 d\alpha\int_0^1\alpha_2 d\alpha-\tfrac{1}{2}\int_0^1\alpha_2 d\alpha\right]t+\left[\int_0^1 d\alpha\int_0^1\alpha_3 d\alpha-\tfrac{1}{2}\int_0^1\alpha_3 d\alpha\right]+\text{etc.},$$

$$=a_0+a_1 t+a_2 t^2+\text{etc.}\qquad(\varepsilon)$$

$$a_m=\int_0^1 d\alpha\int_0^1\alpha_{m+1}d\alpha-\tfrac{1}{2}\int_0^1\alpha_{m+1}d\alpha.\qquad(\delta)$$

L'intégration par parties donne :

$$\int d\alpha\int_0^1\alpha_{m+1}d\alpha=\alpha\int_0^1\alpha_{m+1}d\alpha-\int\alpha\cdot\alpha_{m+1}d\alpha\,;$$

d'où :

$$\int_0^1 d\alpha\int_0^1\alpha_{m+1}d\alpha=\int_0^1\alpha_{m+1}d\alpha-\int_0^1\alpha\cdot\alpha_{m+1}d\alpha.$$

On a donc, en substituant cette expression dans ($\delta$) :

$$a_m=\int_0^1 \alpha_{m+1}d\alpha-\int_0^1 \alpha\,\alpha_{m+1}d\alpha-\tfrac{1}{2}\int_0^1 \alpha_{m+1}d\alpha,$$

$$=\int_0^1 (\tfrac{1}{2}-\alpha)\alpha_{m+1}d\alpha. \qquad (\varepsilon)$$

Fesons dans cette expression, $m=0, 1, 2$, etc., il vient :

$$\left.\begin{array}{l} a_0=\int_0^1 (\tfrac{1}{2}-\alpha)\alpha_1 d\alpha=\int_0^1 \tfrac{1}{2}\alpha d\alpha-\int_0^1 \alpha^2 d\alpha=-\tfrac{1}{12}, \\ a_1=\int_0^1 (\tfrac{1}{2}-\alpha)\alpha_2\, d\alpha=\int_0^1 (\tfrac{1}{2}-\alpha)\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{1\cdot 2}d\alpha=0, \\ a_2=\dfrac{1}{2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{120},\ a_3=\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{80},\ \text{etc.} \end{array}\right\} \qquad (\eta)$$

Donc, en ayant égard à la formule ($\varepsilon$), l'expression ($\alpha$) deviendra :

$$\varpi(\mu)=\int_0^1 (\tfrac{1}{12}-a_2t^2-a_3t^3-\text{etc.})(1-t)^{\mu-1}dt. \qquad (\alpha')$$

Mais on a en général :

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; \qquad \text{donc :}$$

$$\int_0^1 t^m(1-t)^{\mu-1}dt=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(1+m+\mu)}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\, m\,\Gamma(\mu)}{(m+p)\Gamma(m+p)},$$

$$=\frac{1\cdot 2\ldots m}{p(p+1)\ldots(p+m)}.$$

En fesant $m=1, 2, 3$, etc., on trouve, à la place de ($\alpha'$) :

$$\varpi(\mu)=\int_0^1 \tfrac{1}{12}(1-t)^{\mu-1}dt-a_2\int_0^1 t^2(1-t)^{\mu-1}dt-a_3\int_0^1 t^3(1-t)^{\mu-1}dt - \text{etc.},$$

$$\varpi(\mu)=\frac{1}{\mu}\left[\tfrac{1}{12}-\frac{1\cdot 2}{(\mu+1)(\mu+2)}a_2-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}a_3-\text{etc.}\right] \qquad (59)$$

$$a_2=\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{120},\quad a_3=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{30},\ \text{etc.}$$

*4me Développement de $\varpi(\mu)$ en série convergente.*

On a :

$$\varpi(\mu)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\tfrac{1}{2}\right)e^{-\mu x}\frac{dx}{x},$$

$$=\int_0^\omega\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\tfrac{1}{2}\right)e^{-\mu x}\frac{dx}{x}+\int_\omega^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\tfrac{1}{2}\right)e^{-\mu x}\frac{dx}{x}.$$

Fesons dans la 2de intégrale à droite $1-e^{-x}=t$, on aura à la place des limites $x=\begin{cases}\infty\\0\end{cases}$, les suivantes $t=\begin{cases}1\\1-e^{-\omega}\end{cases}$.

Soit pour abréger $1-e^{-\omega}=\Omega$, on aura :

$$\varpi(\mu)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\tfrac{1}{2}\right)e^{-\mu x}\frac{dx}{x}-$$

$$\int_\Omega^1\left(\frac{1}{t}-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{l(1-t)}\right)\frac{(1-t)^{\mu-1}}{l(1-t)}\cdot dt. \qquad (x)$$

Soient $B_1=\frac{1}{6}$, $B_3=\frac{1}{30}$, $B_5=\frac{1}{42}$, etc. les nombres de Bernouilli, caractérisés par les relations connues :

$$\left.\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=B_1\cdot\frac{2\pi^2}{1\cdot 2},\\
&1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=B_3\cdot\frac{2^3\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\\
&1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots=B_5\cdot\frac{2^5\pi^6}{1\cdot 3\ldots 6},\\
&\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\\
&1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\ldots=B_{2m-1}\cdot\frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{1\cdot 2\ldots 2m};
\end{aligned}\right\} \qquad (59')$$

on aura, en changeant dans la série :

$$\tfrac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=\frac{1}{x}-B_1\frac{x}{2}-B_3\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-B_5\frac{x^5}{1\cdot 2\ldots 6}-\text{etc.},$$

$x$ en $x\sqrt{-1}$, et en observant que

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x\sqrt{-1}=\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}x}+e^{\frac{1}{2}x}}{e^{-\frac{1}{2}x}-e^{\frac{1}{2}x}}=-\sqrt{-1}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\tfrac{1}{2}\right),$$

la formule :

$$\frac{1}{x}\left[\frac{1}{1-e^{-x}}-\tfrac{1}{2}-\frac{1}{x}\right]=\frac{B_1}{1\cdot 2}-\frac{B_3x^2}{1\cdot 2\,..\,4}+\frac{B_5x^4}{1\cdot 2\,..\,6}-\text{etc.}\qquad(\gamma)$$

De plus, on a trouvé, dans le développement précédent :

$$\left[\frac{1}{t}-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{l(1-t)}\right]\frac{1}{l(1-t)}=\tfrac{1}{12}+a_2t^2+a_3t^3+\text{etc.};\qquad(\delta)$$

donc $(\alpha)$ devient :

$$\varpi(\mu)=\int_0^\omega\left[\frac{B_1}{1\cdot 2}-\frac{B_3x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{B_5x^4}{1\cdot 2\,..\,6}-\text{etc.}\right]e^{-\mu x}dx+$$

$$\int_\Omega^1\left[\tfrac{1}{12}-a_2t^2-a_3t^3-\text{etc.}\right](1-t)^{\mu-1}dt.\qquad(60)$$

Les intégrations indiquées dans les divers termes du second membre de cette équation peuvent s'obtenir facilement, en observant que ces intégrales sont contenues dans les suivantes :

$$\int_0^\omega x^m e^{-\mu x}dx,\quad \int_\Omega^1 t^m(1-t)^{\mu-1}dt.$$

Or, on a : 1°

$$\int_0^\omega e^{-\mu x}dx=\frac{1-e^{-\mu\omega}}{\mu}$$; donc en différentiant $m$ fois par rapport à $\mu$, on en déduit :

$$\int_0^\omega x^m e^{-\mu x}dx=(-1)^m\frac{d^m}{d\mu^m}\left(\frac{1-e^{-\mu\omega}}{\mu}\right).$$

On a : 2°

$$\int_\Omega^1(1-kt)^{\mu+m-1}dt=\frac{(1-k\Omega)^{\mu+m}-(1-k)^{\mu+m}}{(\mu+m)^k};$$

en différentiant celle-ci $m$ fois par rapport à $k$ il vient :

$$\int_\Omega^1 t^m(1-kt)^{\mu-1}dt=\frac{(-1)^m}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}\frac{d^m}{dk^m}\left[\frac{(1-k\Omega)^{\mu+m}-(1-k)^{\mu+m}}{k}\right].$$

Si, après avoir effectué les différentiations indiquées, on fait

cette dernière $k=1$, on obtient la valeur de l'intégrale

$$\int_{\Omega}^{1} t^m(1-t)^{\mu-1}dt.$$

La formule (60) ne subsiste que pour des valeurs de $\omega < 2\pi$. Si l'on fait dans cette form. (60), $\omega=\infty$, et par suite $\Omega=1$, on a la formule inexacte de Stirling, savoir :

$$\varpi(\mu)=\int_0^\infty \left[\frac{B_1}{1\cdot 2}-\frac{B_3x^2}{1\cdot 2\,..\,4}+\frac{B_5x^4}{1\cdot 2\,..\,6}-\text{etc.}\right]e^{-\mu x}dx,$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{B_1}{1\cdot 2\mu}-\frac{B_3}{3\cdot 4\,\mu^3}+\frac{B_5}{5\cdot 6\,\mu^5}-\text{etc.} \qquad (61)$$

Quoique cette formule soit inadmissible quand on suppose la série (61) prolongée à l'infini, cependant, lorsque, quand $\mu$ est très-grand, on se borne à calculer un petit nombre de termes de cette suite, la somme de ces termes fournit à très-peu près la valeur de $\varpi(\mu)$. Nous allons démontrer cette dernière proposition, en cherchant, 1° la forme finie exacte de la série (61) ; 2° jusqu'à quel terme il est permis de calculer cette série, et enfin 3° en évaluant les limites entre lesquelles est comprise l'erreur commise en négligeant le reste.

### 1° *Forme finie exacte de la Formule de Stirling.*

La formule de Stirling sert à calculer $l\Gamma(\mu)$, au moyen de la form. (55), lorsqu'on donne à $\varpi(\mu)$ la valeur inexacte (61). Il s'agit de donner à cette valeur inexacte, une forme finie rigoureuse. A cet effet, prenons la formule connue

$$\cot x=\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x-\pi}+\frac{1}{x+\pi}\right)+\left(\frac{1}{x-2\pi}+\frac{1}{x+2\pi}\right)+\left(\frac{1}{x-3\pi}+\frac{1}{x+3\pi}\right)+\text{etc.};$$

elle donne :

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{4\pi^2+x^2}+\frac{1}{16\pi^2+x^2}+\frac{1}{36\pi^2+x^2}+\text{etc.}\right). \qquad (\alpha)$$

Mais on a en général :

$$\frac{1}{k^2+x^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{x^2}{k^4}+\frac{x^4}{k^6}-\text{etc.}\pm\frac{x^{2m-2}}{k^{2m}}\mp\frac{x^{2m}}{k^{2m}(k^2+x^2)}. \qquad (\gamma)$$

Donc en fesant $k=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi$, on obtient pour ($\alpha$) la forme exacte et finie :

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$2\Big[\frac{1}{(2\pi)^2}-\frac{x^2}{(2\pi)^4}+\frac{x^4}{(2\pi)^6}-\text{etc.}\pm\frac{x^{2m-2}}{(2\pi)^{2m}}\mp\frac{x^{2m}}{(2\pi)^{2m}(4\pi^2+x^2)}$$

$$\frac{1}{(4\pi)^2}-\frac{x^2}{(4\pi)^4}+\frac{x^4}{(4\pi)^6}-\text{etc.}\pm\frac{x^{2m-2}}{(4\pi)^{2m}}\mp\frac{x^{2m}}{(4\pi)^{2m}(16\pi^2+x^2)}$$

$$\frac{1}{(6\pi)^2}-\frac{x^2}{(6\pi)^4}+\frac{x^4}{(6\pi)^6}-\text{etc.}\pm\frac{x^{2m-2}}{(6\pi)^{2m}}\mp\frac{x^{2m}}{(6\pi)^{2m}(36\pi^2+x^2)}$$

$$\text{etc.}\quad\text{etc.}\quad\text{etc.}\quad\text{etc.}\quad\text{etc.}\quad\Big],$$

$$=2\Big[\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\right)\frac{1}{2^2\pi^2}-\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots\right)\frac{x}{2^4\pi^4}+$$

$$\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\dots\right)\frac{x^4}{2^6\pi^6}-\text{etc.},$$

$$\pm\left(1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\dots\right)\frac{x^{2m-2}}{2^{2m}\pi^{2m}}\Big]\mp R_m, \qquad (\delta)$$

$$R^m=2\left\{\frac{x^{2m}}{(2\pi)^{2m}[(2\pi)^2+x^2]}+\frac{x^{2m}}{(4\pi)^{2m}[(4\pi)^2+x^2]}+\text{etc.}\right\}, \qquad (\varepsilon)$$

$$=\frac{B_1}{1\cdot 2}-\frac{B_3}{1\cdot 2\,..\,4}x^2+\frac{B_5}{1\cdot 2\,..\,6}x^4-\text{etc.}\pm\frac{B_{2m-1}}{1\cdot 2\,..\,2m}x^{2m-2}\mp R_m.$$

Mais on a, en général :

$$\frac{x^{2m}}{k^{2m}(k^2+x^2)}<\frac{x^{2m}}{k^{2m+2}},$$

donc, à cause de l'expression ($\varepsilon$),

$$R_m<2\left[\frac{x^{2m}}{(2\pi)^{2m+2}}+\frac{x^{2m}}{(4\pi)^{2m+2}}+\frac{x^{2m}}{(6\pi)^{2m+2}}+\text{etc.}\right],$$

$$<2\left[1+\frac{1}{2^{2m+2}}+\frac{1}{3^{2m+2}}+\text{etc.}\right\}\frac{x^{2m}}{(2\pi)^{2m+2}},$$

$$<2\left[B_{2m+1}\frac{2^{2m}\cdot\pi^{2m+2}}{3\cdot 4\,..\,2m+2}\cdot\frac{x^{2m}}{(2\pi)^{2m+2}}\right.,$$

$$<\frac{B_{2m+1}x^{2m}}{2\cdot 3\dots 2m+2}. \qquad (\eta)$$

Donc, en posant $0<\theta<1$, on aura :

$$R_m = \theta \cdot \frac{B_{2m+1} x^{2m}}{2\cdot 3 \ldots (2m+2)}. \qquad (\zeta)$$

Par conséquent

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{B_1}{1\cdot 2} - \frac{B_3}{1\cdot 2\ldots 4}x^2 +$$

$$\frac{B_5}{1\cdot 2\ldots 6}x^4 - \text{etc.} \pm \frac{B_{2m+1}}{1\cdot 2\ldots 2m}x^{2m-2} \mp \theta \cdot \frac{B_{2m+1}}{1\cdot 2\ldots (2m+2)}x^{2m}.$$

De celle-ci on déduit :

$$\varpi(\mu) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-\mu x}dx = \frac{B_1}{1\cdot 2}\int_0^\infty e^{-\mu x}dx -$$

$$\frac{B_3}{1\cdot 2\ldots 4}\int_0^\infty x^2 e^{-\mu x}dx + \frac{B_5}{1\cdot 2\ldots 6}\int_0^\infty x^4 e^{-\mu x}dx - \text{etc.}$$

$$\pm \frac{B_{2m-1}}{1\cdot 2\ldots 2m}\int_0^\infty x^{2m-2}e^{-\mu x}dx \mp \int_0^\infty R_m e^{-\mu x}dx,$$

$$= \frac{B_1}{1\cdot 2\,\mu} - \frac{B_3}{3\cdot 4\,\mu^3} + \frac{B_5}{5\cdot 6\,\mu^5} - \text{etc.} \pm \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m\,\mu^{2m-1}}$$

$$\mp \int_0^\infty R_m e^{-\mu x}dx.$$

Mais à cause de $(\zeta)$ on a :

$$R_m e^{-\mu x}dx < \frac{B_{2m+1}x^{2m}e^{-\mu x}dx}{2\cdot 3\ldots(2m+2)}; \quad \text{donc}$$

$$\int_0^\infty R_m e^{-\mu x}dx < \frac{B_{2m+1}}{2\cdot 3\ldots(2m+2)}\int_0^\infty x^{2m}e^{-\mu x}dx < \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)\mu^{2m+1}}.$$

Soit $0<\lambda<1$, on pourra poser :

$$\int_0^\infty R_m e^{-\mu x}dx = \lambda \cdot \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)\mu^{2m+1}}.$$

On a donc pour la forme cherchée :

$$\varpi(\mu) = \frac{B_1}{1\cdot 2\,\mu} - \frac{B_3}{3\cdot 4\,\mu^3} + \frac{B_5}{5\cdot 6\,\mu^5} - \text{etc.} -$$

$$(-)^m \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m\,\mu^{2m-1}} - (-1)^{m+1}\lambda \cdot \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)\mu^{2m+1}}. \qquad (62)$$

*2° Détermination du rang du terme de la Formule de Stirling, jusqu'auquel il est permis de la calculer.*

$$\text{Soient } T_{2m+1} = \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)\mu^{2m+1}},$$

$$T_{2m-1} = \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)(2m\mu^{2m-1}};$$

on aura, pour le rapport de ces deux termes consécutifs de la suite de Stirling :

$$\frac{T_{2m+1}}{T_{2m-1}} = \frac{(2m-1)m}{(2m+1)(2m+2)} \cdot \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{B_{2m+1}}{B_{2m-1}}.$$

Mais on a, par les form. (59′) :

$$\frac{B_{2m+1}}{B_{2m-1}} = \frac{(2m+1)(2m+2)}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1+(\frac{1}{2})^{2m+2}+\ldots}{1+(\frac{1}{2})^{2m}+\ldots};$$

donc :

$$\frac{T_{2m+1}}{T_{2m-1}} = \frac{(2m+1)(2m+2)}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1+(\frac{1}{2})^{2m+2}+\ldots}{1+(\frac{1}{2})^{2m}+\ldots} \cdot \frac{(2m-1)m}{(2m+1)(2m+2)} \cdot \frac{1}{\mu^2};$$

Par suite :

$$\frac{T_{2m+1}}{T_{2m-1}} < \frac{(2m+1)(2m+2)}{(2\pi)^2} \cdot \frac{(2m-1)m}{(2m+1)(2m+2)} \cdot \frac{1}{\mu^2},$$

$$< (2m-1)m \cdot \tfrac{1}{2}\ \frac{1}{\pi^2\mu^2},$$

$$< (2m-1)2m\left(\frac{1}{2\pi\mu}\right)^2,$$

$$< \left(\frac{m}{\pi\mu}\right)^2.$$

Donc les termes de la suite que donne d'après Stirling, la valeur de $\varpi(\mu)$, vont en décroissant jusqu'à ce qu'on arrive à un terme dont le rang $m$ surpasse $\pi\mu$, ou $3\mu$, puisque $\pi > 3$.

*3° Détermination des limites de l'erreur commise en ne calculant la série de Stirling que jusqu'à un terme d'un certain rang.*

1° Si l'on prend pour la valeur de $\varpi(\mu)$ la somme :

$$\varpi(\mu) = \frac{B_1}{1\cdot 2\mu} - \frac{B_3}{3\cdot 4\mu^3} + \ldots \pm \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m\mu^{2m-1}}, \qquad (\alpha)$$

la formule (62) fait voir que l'erreur commise est une partie du terme qui suivrait le dernier terme de la somme ($\alpha$), savoir, $\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)\mu^{2m+1}}$; l'erreur commise est donc inférieure à la valeur numérique de ce terme.

2° Cherchons une limite supérieure au terme général

$$\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m\,\mu^{2m-1}}. \qquad (\beta)$$

Pour cela on a, par les expressions (59′) :

$$\frac{B_{2m-1}}{B_1} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 3\,..\,2m}{(2\pi)^{2m-2}}\cdot\frac{1+(\frac{1}{2})^{2m}+\dots}{1+(\frac{1}{2})^2+\dots};$$

donc $$B_{2m-1} < \frac{B_1}{2}\cdot\frac{2\cdot 3\,..\,2m}{(2\pi)^{2m-1}},$$

$$< \tfrac{1}{12}\cdot\frac{\Gamma(2m+1)}{(2\pi)^{2m-2}}.$$

Or, pour $m=0$, la form. (62) donne $\varpi(\mu)=\frac{\lambda}{12\mu}$; on a donc, à cause de

$$\Gamma(\mu)=\sqrt{2\pi}\,\mu^{\mu-\frac{1}{2}}e^{-\mu}e^{\varpi(\mu)},$$

la relation

$$\Gamma(\mu)<\sqrt{2\pi}\,\mu^{\mu-\frac{1}{2}}e^{-\mu}e^{\frac{1}{12\mu}}.$$

Donc en prenant

$$\Gamma(2m+1)=2m\,\Gamma(2m)=\sqrt{2\pi}\,(2m)^{2m+\frac{1}{2}}e^{-2m}e^{\frac{1}{24m}},$$

on aura :

$$B_{2m-1}<\tfrac{1}{12}\frac{(2m)^{2m+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2m-\frac{1}{2}}}e^{-2m}e^{\frac{1}{24m}};$$

on a donc :

$$\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m\,\mu^{2m-1}}<\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{\mu}{2m-1}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{\pi\mu e}\right)^{2m}e^{\frac{1}{24m}}. \qquad (63)$$

Cherchons ce que devient cette limite pour $m=3\mu$, valeur qui exprime le rang auquel il faut arrêter la série de Stirling, si l'on veut obtenir le plus grand effet utile de cette formule.

Pour $m = 3\mu$, la limite supérieure (63) se réduit à :

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{6\mu-\frac{3}{2}} \frac{\pi\mu}{6\mu-1} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6\mu} e^{\frac{1}{72\mu}}.$$

Si $\mu = 1$, l'expression

$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{6\mu-\frac{3}{2}} \frac{\pi\mu}{6\mu-1} e^{\frac{1}{72\mu}}$ est plus petite que $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{5} e^{\frac{1}{72}} = 0,5177\ldots$

Donc, si $\mu > 1$, le terme de $\varpi(\mu)$, dont le rang est $3\mu$, aura une valeur $< (0,5177\ldots)\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6\mu}$. (γ)

Donc pour $\mu > 1$, on obtient pour $\varpi(\mu)$ une valeur approchée telle que l'erreur commise reste inférieure à l'expression (γ). Cette valeur approchée sera, d'après 1°, la somme des $3\mu - 1$ premiers termes de la suite (62).

Observons que la limite supérieure (γ) est toujours un nombre très-petit. En effet, soit d'abord $\mu = 4$, alors (γ) devient

$$0,97\ldots \left(\frac{1}{10}\right)^{11};$$

donc l'erreur commise sera $< \left(\frac{1}{10}\right)^{11}$.

Soit ensuite $\mu = 10$; alors l'expression (γ) devient

$$1,43\ldots \left(\frac{1}{10}\right)^{27};$$

l'erreur commise sera donc inférieure à

0, 00000 00000 00000 00000 00000 0143...

### 11^me Théorème.

a *étant un nombre positif,* λ *le plus grand entier contenu dans* a, *je dis que l'on aura :*

$$\Gamma(-a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - \Sigma_{\lambda+1} e^{-x}}{x^{a+1}} dx,$$

$$\Sigma_{\lambda+1} e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + (-1)^\lambda \frac{x^\lambda}{1\cdot 2\ldots\lambda}.$$

*Démonstration.* Soit $a = \lambda + \frac{\mu}{\nu}$ ; comme on a :

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-sx} dx = \frac{\Gamma(a)}{s^a}, \text{ on en tire : } s^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-sx} dx.$$

Remplaçons $a$ par $1 - \frac{\mu}{\nu}$, il vient : $s^{\frac{\mu}{\nu}-1} =$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\frac{\mu}{\nu})} \int_0^\infty x^{-\frac{\mu}{\nu}} e^{-sx} dx.$$ Multiplions par $ds$, puis intégrons par rapport à $s$, on aura :

$$\frac{s^{\frac{\mu}{\nu}}}{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{-1}{\Gamma(1-\frac{\mu}{\nu})} \int_0^\infty x^{-\frac{\mu}{\nu}} dx \left(\frac{e^{-sx}}{x} - c_0\right).$$

Multiplions de nouveau par $ds$, et intégrons par rapport à $s$, on aura :

$$\frac{s^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{\frac{\mu}{\nu}(\frac{\mu}{\nu}+1)} = \frac{(-1)^2}{\Gamma(1-\frac{\mu}{\nu})} \int_0^\infty x^{-\frac{\mu}{\nu}} dx \left(\frac{e^{-sx}}{x^2} + s c_0 - c_1\right); \text{ etc.}$$

Les constantes $c_0$, $c_1$, sont en général des fonctions de $x$, puisque les intégrations ont été effectuées par rapport à $s$. Si donc on intégre $\lambda + 1$ fois de suite par rapport à $s$, on aura un résultat de la forme :

$$\frac{s^{\lambda+\frac{\mu}{\nu}}}{\frac{\mu}{\nu}(1+\frac{\mu}{\nu})\ldots(\lambda+\frac{\mu}{\nu})} =$$

$$\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\Gamma(1-\frac{\mu}{\nu})} \int_0^\infty x^{-\frac{\mu}{\nu}} (e^{-sx} - X_0 - sX_1 - s^2X_2 - \text{etc.} - s^\lambda X_\lambda) \frac{dx}{x^{\lambda+1}}. \quad (\alpha)$$

Déterminons les constantes $X_0$, $X_1$, $X_2$, ... $X_\lambda$, fonctions de $x$. A cet effet, observons 1° que le premier membre de $(\alpha)$ dis-

parait pour $s=0$, il doit donc en être ainsi du second membre ; et par suite on devra avoir, pour $s=0$,

$$e^{-sx}-X_0-sX_1-\ldots-s^{\lambda}X_{\lambda}=0, \quad \text{d'où :} \quad X_0=1.$$

2° Qu'en différentiant ($\alpha$) par rapport à $s$, on aura :

$$\frac{s^{\lambda-1+\frac{\mu}{\nu}}}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\ldots\left(\lambda-1+\frac{\mu}{\nu}\right)}=$$

$$\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\Gamma\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)}\int_0^{\infty}x^{-\frac{\mu}{\nu}}\left(-e^{-sx}x-X_1-2sX_2-\text{etc.}-\lambda s^{\lambda-1}X_{\lambda}\right)\frac{dx}{x^{\lambda+1}}. \quad (\beta)$$

Pour $s=0$, le premier membre disparait, on a donc

$$-e^{-sx}x-X_1-2sX_2-\text{etc.}-\lambda s^{\lambda-1}X_{\lambda}=0, \quad \text{ou} \quad X_1=-\frac{x}{1}.$$

3° Qu'en différentiant ($\beta$) par rapport à $s$, on trouvera :

$$\frac{s^{\lambda-2+\frac{\mu}{\nu}}}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\ldots\left(\lambda-2+\frac{\mu}{\nu}\right)}=$$

$$\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\Gamma\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)}\int_0^{\infty}x^{-\frac{\mu}{\nu}}\left(e^{-sx}x^2-1\cdot2X_2-2\cdot3sX_3-\ldots-\lambda(\lambda-1)s^{\lambda-2}X_{\lambda}\right)\frac{dx}{x^{\lambda+1}};$$

d'où l'on tire, pour $s=0$, $X_2=\frac{x^2}{1\cdot2}$.

On trouvera de même $X_3=-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}$, etc., et enfin, après avoir différentié $\lambda+1$ de suite, $X_{\lambda}=(-1)^{\lambda}\frac{x^{\lambda}}{1\cdot2\ldots\lambda}$.

Donc, en substituant les valeurs de $X_0$, etc., qu'on vient de déterminer, dans l'équation ($\alpha$), celle-ci se change en :

$$\frac{s^{\lambda+\frac{\mu}{\nu}}}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}+1\right)\ldots\left(\lambda+\frac{\mu}{\nu}\right)}=$$

$$\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\Gamma\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)}\int_0^\infty x^{-\frac{\mu}{\nu}}\left[e^{-sx}-\left(1-\frac{sx}{1}+\frac{s^2x^2}{1.2}-\text{etc.}+(-1)^\lambda\frac{s^\lambda x^\lambda}{1.2..\lambda}\right)\right]\frac{dx}{x^{\lambda+1}}. \quad (\gamma$$

Soit, pour abréger :

$$\Sigma_{\lambda+1}e^{-s\lambda}=1-\frac{sx}{1}+\frac{s^2x^2}{1\cdot 2}-\text{etc.}+(-1)^\lambda\frac{s^\lambda x^\lambda}{1\cdot 2\,..\,\lambda}. \quad (\partial$$

Celà posé, comme on a $\lambda+\frac{\mu}{\nu}=a$,

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(1+\frac{\mu}{\nu}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{\mu}{\nu}\right)=$$

$$\frac{1\cdot 2\ldots\left(\lambda+\frac{\mu}{\nu}\right)}{1\cdot 2\ldots\left(\frac{\mu}{\nu}-1\right)}=\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{\mu}{\nu}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)}=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)},$$

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\Gamma\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\pi}=\frac{\pi}{\sin(a-\lambda)\pi}=(-1)^\lambda\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

l'équation $(\gamma)$ donnera :

$$s^a=-\frac{\Gamma(a+1)\sin a\pi}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-sx}-\Sigma_{\lambda+1}e^{-sx}}{x^{a+1}}dx. \quad (\varepsilon$$

Mais si dans la relation

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

on change $a$ en $-a$, on en tire $-\Gamma(a+1)\sin a\pi=\frac{\pi}{\Gamma(-a)}$; donc $(\varepsilon$ devient :

$$s^a=\frac{1}{\Gamma(-a)}\int_0^\infty\frac{e^{-sx}-\Sigma_{\lambda+1}e^{-sx}}{x^{a+1}}dx. \quad (64)$$

Si l'on fait ici $s=1$, on trouve enfin :

$$\Gamma(-a)=\int_0^\infty\frac{e^{-x}-\Sigma_{\lambda+1}e^{-x}}{x^{a+1}}dx. \quad (65)$$

*Remarque.* C'est ici le lieu de dire un mot des intégrales que M. Cauchy appelle *extraordinaires*, et qu'il désigne par le signe $\int$ accentué.

Soit $$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n-1)}(0) + $$
$$+ \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\ldots n+1} f^{(n+1)}(0) + \text{etc.}, \quad (\alpha)$$

et posons

$$F(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots n-1} f^{(n-1)}(0), \quad (\beta)$$

en sorte que l'on ait :

$$f(x) - F(x) = \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\ldots n+1} f^{(n+1)}(0) + \text{etc.} \quad (\gamma)$$

Soit de plus $a+1 = n + \frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu} < 1$, $n - a = 1 - \frac{\mu}{\nu}$,

$n - a + 1 = 2 - \frac{\mu}{\nu}$, etc.; cela posé on aura : 1°

$$\int \frac{f(x)dx}{x^{a+1}} = -\frac{f(0)}{ax^a} - \frac{f'(0)}{(a-1)x^{a-1}} - \text{etc.}; \qquad \text{donc :}$$

$$\int_0^b \frac{f(x)dx}{x^{a+1}} = \infty - \left[\frac{f(0)}{ab^a} + \text{etc.}\right] = \infty.$$

On aura 2°

$$\int \frac{f(x) - F(x)}{x^{a+1}} dx = -\frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\ldots n(a-n)x^{a-n}} -$$
$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{1\cdot 2\ldots(n+1)(a-n-1)x^{a-n-1}} - \text{etc.}$$

$$= \frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2 \ldots (n-a)} x^{1-\frac{\mu}{\nu}} + \frac{f^{(n+1)}(0)}{1\cdot 2\ldots(n+1)(n+1-a)} x^{2-\frac{\mu}{\nu}} + \text{etc.};$$

d'où :

$$\int_0^b \frac{f(x) - F(x)}{x^{a+1}} dx = \frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\ldots(n-a)} b^{1-\frac{\mu}{\nu}} + \frac{f^{(n+1)}(0)}{1\cdot 2\ldots(n+1)(n-a+1)} b^{2-\frac{\mu}{\nu}}$$
$$+ \text{etc.}$$

Donc, $a$ étant positif, $f(x)$ ne s'évanouissant pas avec $x$,

tandis que l'intégrale

$$\int_0^b \frac{\mathrm{f}(x)dx}{x^{a+1}}$$

est toujours infinie, la suivante au contraire

$$\int_0^b \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{F}(x)}{x^{a+1}}dx, \qquad (66)$$

dans laquelle $\mathrm{F}(x)$ est déterminée par la relation ($\beta$), conservera une valeur finie. L'intégrale (66) est celle que M. Cauchy nomme intégrale extraordinaire, et la désigne de cette manière :

$$\int_0^b \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{F}(x)}{x^{a+1}}dx = \int_0^{\mathrm{f}\;b} \frac{\mathrm{f}(x)}{x^{a+1}}dx. \qquad (67)$$

Les intégrales extraordinaires se déterminent le plus fréquemment par des différentiations et des intégrations successives ; mais avant d'en donner un exemple, il faudra démontrer qu'il est permis de différentier et d'intégrer ces sortes d'expressions.

1° Soit $\quad \mathrm{Y} = \int_0^b \frac{\mathrm{f}(x,y)-\mathrm{F}(x,y)}{x^{a+1}}dx = \int_0^{\mathrm{f}\;b} \frac{\mathrm{f}(x,y)}{x^{a+1}}dx;$

on aura, en différentiant par rapport à $y$ :

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dy} = \int_0^b \left[\frac{d\mathrm{f}(x,y)}{dy} - \frac{d\mathrm{F}(x,y)}{dy}\right]\frac{dx}{x^{a+1}} = \int_0^{\mathrm{f}\;b} \frac{d\mathrm{f}(x,y)}{dy}\cdot\frac{dx}{x^{a+1}}.$$

2° On a $\quad \mathrm{Y}dy = \int_0 \frac{\mathrm{f}(x,y)dy-\mathrm{F}(x,y)dy}{x^{a+1}}dx;$

donc, en intégrant par rapport à $y$ entre les limites quelconques $\alpha$ et $\beta$, on a :

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{Y}dy = \int_0^b \frac{\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x,y)dy - \int_\alpha^\beta \mathrm{F}(x,y)dy}{x^{a+1}}dx = \int_0^{\mathrm{f}\;b}\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x,y)dy\cdot\frac{dx}{x^{a+1}}.$$

Observons encore que l'intégrale extraordinaire devient ordinaire chaque fois que l'on a $\mathrm{F}(x)=0$, ce qui arrive, par exemple, lorsque $a$ est négatif.

Problème. — *Déterminer la valeur de l'intégrale extraordinaire :*

$$(\alpha)\qquad S=\int_0^\infty e^{-sx}\frac{dx}{x^{a+1}}.\qquad a>0,\ s>0.$$

*Solution.* Soit $n$ le plus grand entier contenu dans $a+1$, en différentiant $n$ fois de suite l'expression $(\alpha)$ par rapport à $s$, on trouve :

$$\frac{d^nS}{ds^n}=(-1)^n\int_0^\infty e^{-sx}\frac{dx}{x^{a-n+1}}.\qquad(\beta)$$

Mais comme le plus grand entier contenu dans $a-n+1$ est zéro, on a ici $F(x)=0$; donc l'intégrale $(\beta)$ se change en une intégrale ordinaire, et l'on a :

$$\frac{d^nS}{ds^n}=(-1)^n\int_0^\infty x^{n-a-1}e^{-sx}dx=(-1)^n s^{a-n}\Gamma(n-a).\qquad(\gamma)$$

Intégrons $n$ fois de suite cette dernière à partir de $s=0$, il vient :

$$S=s^a.\frac{\Gamma(n-a)}{(n-a-1)(n-a-2)\ldots(-a)}=s^a\Gamma(-a).\qquad(\delta)$$

On a donc :

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{dx}{x^{a+1}}=s^a\Gamma(-a).$$

Pour $s=1$, il vient :

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{x^{a+1}}=\Gamma(-a).\qquad(\varepsilon)$$

En changeant dans cette dernière $a$ en $-a$, l'intégrale devient ordinaire, et l'on a :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx=\Gamma(a).$$

Nous renvoyons pour d'autres exemples de la détermination des intégrales extraordinaires à un Mémoire de M. Cauchy (*Journal de l'Ecole polytechnique*, tom. XVII, p. 224), et aussi aux *Exercices de Mathématique*, année 1826, p. 55.

## CONSTRUCTION ET USAGE DES TABLES DE FONCTIONS Γ.

### A. Construction des Tables.

1er Problème. — *Construire une Table des fonctions* Γ *de* $\frac{1}{n}$ *en* $\frac{1}{n}$ *de* Γ(0) *à* Γ(½).

*Solution.* Calculer la fonction $\varpi(\mu)$, pour $\mu = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{1}{2}$, à l'aide de l'une des séries convergentes que nous avons données pour le développement de cette fonction, puis cherchez les logarithmes $l\Gamma(\frac{1}{n})$, $l\Gamma(\frac{2}{n})$, ... au moyen de la form. (55). Ces logarithmes doivent être convertis ensuite, pour plus de commodité dans les calculs, en logarithmes vulgaires.

1re *Remarque.* Avant de commencer ces calculs directs des fonctions Γ de 0 à ½, il convient de réduire les fonctions à calculer au plus petit nombre possible, au moyen de certaines relations à établir entre les logarithmes de ces fonctions. Pour donner une idée de ces relations, prenons la formule

$$\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2\mu)2^{1-2\mu}\sqrt{\pi};$$

on aura, pour $\mu = \frac{p}{n}$,

$$L\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) + L\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\frac{p}{n}\right) = L\Gamma\left(\frac{2p}{n}\right) + \left(1-\frac{2p}{n}\right)L2 + \tfrac{1}{2}L\pi. \qquad (\alpha)$$

Mais on a aussi

$$L\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\frac{p}{n}\right) + L\Gamma\left(1-\tfrac{1}{2}-\frac{p}{n}\right) = L\pi - L\sin\left(\tfrac{1}{2}+\frac{p}{n}\right)\pi,$$

ou $$L\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\frac{p}{n}\right) + L\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-\frac{p}{n}\right) = L\pi - L\cos\frac{p\pi}{n}. \qquad (\beta)$$

Des équations ($\alpha$), ($\beta$), on peut éliminer par soustraction le terme $L\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{p}{n})$, alors on obtient la relation suivante entre trois logarithmes Γ :

$$L\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) - L\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-\frac{p}{n}\right) = L.\Gamma\left(\frac{2p}{n}\right) + \left(1-\frac{2p}{n}\right)L2 - \tfrac{1}{2}L\pi + L\cos\frac{p\pi}{n}.$$

2$^{me}$ *Remarque.* Dans les Tables construites par Legendre, avec 12 chiffres décimaux, on a pris $n = 1000$.

2$^{me}$ Problème. — *A l'aide d'une Table construite pour les log.* Γ *de* 0 *à* $\frac{1}{2}$, *calculer les log.* Γ *de* $\frac{1}{2}$ *à* 1.

*Solution.* On a : $\Gamma(\frac{p}{n})\Gamma(1-\frac{p}{n}) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{p}{n}\pi}$;

d'où $L\Gamma(1-\frac{p}{n}) = L\pi - L\sin\frac{p}{n}\pi - L\Gamma(\frac{p}{n})$.

Fesons ici $p = 1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}n$, on aura :

$$L\Gamma(1-\frac{1}{n}) = L\pi - L\sin\frac{\pi}{n} - L\Gamma(\frac{1}{n}),$$

$$L\Gamma(1-\frac{2}{n}) = L\pi - L\sin\frac{2\pi}{n} - L\Gamma(\frac{2}{n}),$$

etc. etc.

$$L\Gamma(\tfrac{1}{2}) = L\pi - L\Gamma(\tfrac{1}{2}).$$

3$^{me}$ Problème. — *μ étant l'un quelconque des nombres compris entre les entiers consécutifs* m, m + 1, *si l'on possède une Table pour les logar.* Γ *de tous ces μ, calculer le log.* Γ *pour un nombre quelconque plus petit que* m, *et plus grand que* m + 1.

*Solution.* A cet effet on a les formules :

$$L(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu),\ \Gamma(\mu+2) = \mu(\mu+1)\Gamma(\mu),\ \text{etc.}$$

$$\Gamma(\mu-1) = \frac{\Gamma(\mu)}{\mu-1},\ \Gamma(\mu-2) = \frac{\Gamma(\mu)}{(\mu-1)(\mu-2)},\ \text{etc.}$$

*Remarque.* Legendre a fait $m = 1$; ses tables contiennent les logar. Γ, de la suite des nombres

$$1,\ \tfrac{1}{1000},\ \tfrac{2}{1000},\ \ldots\ 2.$$

En voici un extrait :

| $a$ | LOG. $\Gamma(a)$. | DIFF. I. | II. | III. |
|---|---|---|---|---|
| 1.126 | 9.973 763 843 430 | 167 816 819 | 601 340 | 758 |
| 1.127 | 9.973 596 026 611 | 167 215 479 | 600 582 | 755 |
| 1.128 | 9.973 428 811 132 | 166 614 897 | 599 827 | 753 |
| 1.129 | 9.973 262 196 235 | 166 015 070 | 599 074 | 752 |
| 1.130 | 9.973 096 181 165 | 165 415 996 | 598 322 | 749 |

## B. Usage des Tables de fonct. Γ.

1$^{er}$ Problème. — *Si* a *désigne l'un des nombres de la progression*

$$1, \tfrac{1}{1000}, \tfrac{2}{1000}, \text{etc. } 2,$$

*trouver son logarithme* Γ.

*Solution.* Cherchez l'argument donné $a$, dans la 1$^{re}$ colonne à gauche, le logarithme cherché se trouvera à côté de $a$, dans la colonne adjacente.

On trouverait de même $a$ si l'on donnait $\log \Gamma(a)$, et que ce logarithme fut compris parmi ceux de la table.

Les trois dernières colonnes renferment respectivement, les différences 1$^{re}$, 2$^{me}$ et 3$^{me}$ des nombres placés dans la 2$^{me}$ colonne. Il est essentiel d'observer que :

1° Les différences premières sont négatives de 1 à 1,461, positives de 1,462 à 2,000.

2° Les différences secondes sont positives de $a=1$ à $a=2$;

3° Les différences troisièmes sont négatives de $a=1$ à $a=2$.

2$^{me}$ Problème. — *L'argument donné* b *se trouve entre deux arguments consécutifs de la table, trouver son log.* Γ.

*Solution.* On a, par la formule de Taylor :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}\,\frac{\Delta f(a)}{\delta} + \frac{h(h-\delta)}{1\cdot 2}\,\frac{\Delta^2 f(a)}{\delta^2} + \frac{h(h-\delta)(h-2\delta)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 f(a)}{\delta^3} + \text{etc.}$$

Comme les différences troisièmes de la table sont $< \frac{1}{10^9}$, on peut négliger les différences 4$^{me}$, 5$^{me}$, etc., comme n'exerçant aucune influence sur le 12$^{me}$ chiffre décimal des log. Γ.

Soit donc $h=b-a$, $\delta=1000$, $p=\frac{b-a}{\delta}$, la formule précédente, pour $f(a) = \mathrm{L}\,\Gamma(a)$, devient :

$$\mathrm{L}\Gamma(b) = \mathrm{L}\Gamma(a) + p\Delta \mathrm{L}\Gamma(a) + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 \mathrm{L}\Gamma(a) + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 \mathrm{L}\Gamma(a).$$

Soit $L\Gamma(b)=B$, $L\Gamma(a)=A$, cette formule donne :

$$B=A+p\left[\Delta A-\frac{1-p}{2}\left(\Delta^2 A-\frac{2-p}{3}\Delta^3 A\right)\right]. \qquad (\beta)$$

Fesons $$\Delta^2 A-\frac{2-p}{3}\Delta^3 A=A_2,$$

$$\Delta A-\frac{1-p}{2}A_2=A_1,$$

on aura :

$$B=A+pA_1. \qquad (\gamma)$$

Dans ces formules l'argument $a$ est l'argument tabulaire le plus approchant en moins de l'argument donné $b$; par conséquent les facteurs $L\Gamma(a)$, $\Delta L\Gamma(a)$, $\Delta^2 L\Gamma(a)$, $\Delta^3 L\Gamma(a)$ se prennent immédiatement dans les tables.

### Exemple.

*Chercher* $L\Gamma(1{,}12783)=L\Gamma(b)=B$.

*Solution.* On a ici $a=1{,}127$; on trouve dans la table

$$A=L\Gamma(a)=9{,}973\ 596\ 026\ 611,$$
$$\Delta L\Gamma(a)=-0{,}000\ 167\ 215\ 479,$$
$$\Delta^2 L\Gamma(a)=0{,}000\ 000\ 600\ 582,$$
$$\Delta^3 L\Gamma(a)=-0{,}000\ 000\ 000\ 755.$$

On a de plus $p=\frac{b-a}{1000}=0{,}000\ 000\ 83.$

on trouve $$A_2=0{,}000\ 000\ 601\ 285;$$
$$A_1=-0{,}000\ 167\ 246\ 122,$$
$$B=9{,}973\ 596\ 02\ 6472.$$

### 3^me^ Problème. — $L\Gamma(b)$ *étant donné, trouver l'argument correspondant* b.

*Solution.* La formule ($\beta$), en négligeant le petit terme $\frac{p(1-p)(2-p)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 A$, donne :

$$B-A=p\Delta A-\frac{p(1-p)}{2}\Delta^2 A=D. \qquad (a)$$

d'où, en posant $B - A = D$,

$$p = \frac{D}{\Delta A - \frac{1}{2}(1-p)\Delta^2 A}, \qquad (\delta)$$

$$p_1 = \frac{D}{\Delta A}; \quad (\delta) \text{ donnera :}$$

$$p = \frac{D}{\Delta A - \frac{1}{2}(1-p_1)\Delta^2 A} = p_2.$$

En substituant cette valeur dans ($a$), il vient :

$$D = p_2 \left\{ \Delta A - \frac{1-p_2}{2} \Delta^2 A \right\} = c.$$

Retranchez celle-ci de ($a$), il vient :

$$D - C = (p-p_2)\Delta A - \tfrac{1}{2}(p-p_2)\Delta^2 A + \tfrac{1}{2}(p+p_2)(p-p_2)\Delta^2 A.$$

Prenez $p_2 = \frac{1}{2}(p+p_2)$, on aura :

$$D - C = (p-p_2)[\Delta A + (p_2 - \tfrac{1}{2})\Delta^2 A]; \text{ d'où :}$$

$$p = p_2 + \frac{D-C}{\Delta A + (p_2 - \frac{1}{2})\Delta^2 A}.$$

Mais on a $\frac{b-a}{1000} = p$; donc enfin $b = a + 1000p$.

## APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS Γ.

Nous donnerons des exemples pour deux sortes d'applications de ces fonctions, savoir : 1° pour leur usage dans la détermination de la valeur des intégrales définies ; 2° dans la théorie des suites.

### A.

### INTÉGRALES DÉFINIES EXPRIMÉES A L'AIDE DE FONCTIONS Γ.

#### 1er Problème.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales*

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx, \int_0^\infty x^{2n} e^{-a^2x^2} dx, \int_0^\infty \frac{e^{2bx} + e^{-2bx}}{2} \cdot e^{-a^2x^2}dx,$$

$$\int_0^\infty \cos 2bx\, e^{-a^2x^2}dx, \int_0^\infty x^n \cos(\tfrac{1}{2}n\pi + 2bx)\, e^{-a^2x^2}dx.$$

*Solution.* 1° Si dans les formules

$$\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1} e^{-rz} dz = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{r^{\frac{1}{2}}} = (\frac{\pi}{r})^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_0^\infty z^{n+\frac{1}{2}-1} e^{-rz} dz = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{r^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{(2r)^n}(\frac{\pi}{r})^{\frac{1}{2}},$$

on pose $r=a^2$, $z=x^2$, on obtient :

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \int_0^\infty x^{2n} e^{-a^2x^2}dx = \frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2^n a^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2a}. \quad (68)$$

2° En multipliant la dernière par $\frac{(2b)^{2n}}{1\cdot2..2n}$, puis, après avoir fait $n=0,1,2,3,..$, en ajoutant les résultats, il viendra :

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx\left[1+\frac{(2bx)^2}{1\cdot2}+\frac{(2bx)^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots\right]=$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left[1+\frac{(\frac{b}{a})^2}{1}+\frac{(\frac{b}{a})}{1\cdot2}+\text{etc.}\right]$$

Mais on a :

$$\frac{e^{2bx}+e^{-2bx}}{2}=1+\frac{(2bx)^2}{1\cdot2}+\frac{(2bx)^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\text{etc.},$$

$$e^{(\frac{b}{a})^2}=1+\frac{(\frac{b}{a})}{1}+\frac{(\frac{b}{a})^4}{1\cdot2}+\text{etc.}$$

Donc :

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx\left(\frac{e^{2bx}+e^{-2bx}}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{(\frac{b}{a})^2} \quad (69)$$

3° Si l'on pose dans celle-ci $b=m\sqrt{-1}$, elle devient :

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx\cos 2mx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{a^2}}. \quad (70)$$

4° Différentions cette dernière, $n$ fois de suite par rapport à $b$, après avoir remplacé $m$ par $b$, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{d^n \cos 2bx}{db^n} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot \frac{d^n[e^{-(\frac{b}{a})^2}]}{db^n}.$$

Mais on a :

$$\frac{d^n \cos 2bx}{db^n} = (2x)^n \cos(\tfrac{1}{2}n\pi + 2bx),$$

$$\frac{d^n[e^{-(\frac{b}{a})^2}]}{db^n} = (-1)^n (\frac{2b}{a^2})^n [1 - \frac{n(n-1)}{1}(\frac{a}{2b})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(\frac{a}{2b})^4 - \text{etc.}] e^{-(\frac{b}{a})^2},$$

on a donc :

$$(71) \quad \int_0^\infty x^n \cos(\tfrac{1}{2}n\pi + 2bx) e^{-a^2x^2} dx = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2a} (\frac{b}{a^2})^n [1 - \frac{n(n-1)}{1}(\frac{a}{2b})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(\frac{a}{2b})^4 - \dots] e^{-(\frac{b}{a})^2}.$$

## 2$^{me}$ Problème.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{(\alpha+x)^a}, \int_0^\infty \frac{\sin bx dx}{(\alpha+x)^a}, \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^a} dx, \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^a},$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} \cos bx dx, \int_0^\infty x^{\mu-1} \sin bx dx, \int_{-\infty}^\infty e^{(hx^2+2kx)\sqrt{-1}} dx,$$

$$\int_0^\infty [\frac{b^2}{(\alpha+x)^a} + \frac{a(a+1)}{(\alpha+x)^{a+2}}] \cos bx dx,$$

$$\int_0^\infty [\frac{b^2}{(\alpha+x)^a} + \frac{a(a+1)}{(\alpha+x)^{a+2}}] \sin bx dx.$$

*Solution.* 1° On a, par la form. (15) du 2me livre :

$$\int_0^\infty e^{-yx}\cos bx dx = \frac{y}{y^2+b^2}.$$

Multiplions les deux membres par $y^{a-1}e^{-\alpha y}dy$, puis intégrons entre les limites 0 et $\infty$, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{y^a e^{-\alpha y}dy}{b^2+y^2} = \int_0^\infty y^{a-1}e^{-\alpha y}dy \int_0^\infty e^{-yx}\cos bx dx,$$

$$= \int_0^\infty \cos bx dx \int_0^\infty y^{a-1}e^{-(\alpha+x)y}dy,$$

$$= \int_0^\infty \cos bx dx \cdot \frac{\Gamma(a)}{(\alpha+x)^a},$$

$$= \Gamma(a)\int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{(\alpha+x)^a};$$

d'où l'on tire :

(72) $$\int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{(\alpha+x)^a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0 \frac{y^a e^{-\alpha y}dy}{b^2+y^2}. \qquad (\alpha)$$

Multiplions de même la formule

$$\int_0^\infty e^{-yx}\sin bx dx = \frac{b}{b^2+y^2},$$

par $y^{a-1}e^{-\alpha y}dy$, et intégrons entre 0 et $\infty$, on obtiendra :

$$\int_0^\infty \frac{y^{a-1}dy}{b^2+y^2}e^{-\alpha y} = \int_0^\infty y^{a-1}e^{-\alpha y}dy \int_0^\infty e^{-yx}\sin bx dx,$$

$$= \int_0^\infty \sin bx dx \int_0^\infty y^{a-1}e^{-(\alpha+x)y}dy,$$

$$= \int_0^\infty \sin bx dx \cdot \frac{\Gamma(a)}{(\alpha+x)^a}; \qquad \text{donc :}$$

(73) $$\int_0^\infty \frac{\sin bx dx}{(\alpha+x)^a} = \frac{b}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{y^{a-1}dy}{b^2+y^2}e^{-\alpha y}. \qquad (\beta)$$

2° Fesons dans les formules ($\alpha$) et ($\beta$), $\alpha=0$, elles se réduiront à

$$(74)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{y^a dy}{b^2+y^2}, \qquad (\alpha')$$

$$(75)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx dx}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{by^{a-1} dy}{b^2+y^2}. \qquad (\beta')$$

Fesons $y=bz$, $b$ étant fini et positif, il vient :

$$(76)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{x^a} = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{z^a dz}{1+z^2}, \qquad (\alpha''$$

$$(77)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx dx}{x^a} = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{z^{a-1} dz}{1+z^2}. \qquad (\beta''$$

Ces formules ne sont d'aucun usage quand $a$ est un nombre entier, puisqu'alors les seconds membres sont infinis, excepté néanmoins, pour ($\beta''$ le cas de $a=1$, qui donne $\frac{1}{2}\pi$. Mais il n'en est plus ainsi lorsqu'on a, dans la 1^re^ $0<a<1$, et dans la 2^de^ $0<a<2$; en effet alors les seconds membres auront des valeurs finies, que nous allons déterminer.

Pour cela prenons la formule

$$\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1} du}{1+u} = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}, \quad 0<\mu<1.$$

Fesons $u=z^2$, et successivement $\mu=\frac{a+1}{2}$, $\mu=\frac{a}{2}$, on trouvera :

$$\int_0^\infty \frac{z^a dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}a\pi}, \int_0^\infty \frac{z^{a-1} dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}a\pi};$$

donc les form. ($\alpha''$, ($\beta''$, deviennent :

$$(78)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{x^a} = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}a\pi}, \quad 0<a<1, \qquad (\alpha'''$$

$$(79)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx dx}{x^a} = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}a\pi}, \quad 0<a<2. \qquad (\beta'''$$

Pour $a=\frac{1}{2}$, $\Gamma(a)=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, il vient :

(80) $$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}. \qquad (\gamma$$

Si nous fesons dans celle-ci $x=t^2$, $\sqrt{x}=t$, $dx=2tdt$, on trouve :

(81) $$\int_0^\infty \cos(bt^2)dt = \int_0^\infty \sin(bt^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}. \qquad (\delta$$

Les form. ($\gamma$ et ($\delta$ se contractent chacune en une seule, savoir :

(82) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{bx\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}},$$

(83) $$\int_0^\infty e^{bt^2\sqrt{-1}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}.$$

Si nous prenons les intégrales entre les limites $-\infty$, $\infty$, on trouve :

(84) $$\int_{-\infty}^\infty \cos(bt^2)dt = \int_{-\infty}^\infty \sin(bt^2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

(85) $$\int_{-\infty}^\infty e^{bt^2\sqrt{-1}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\cdot e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}.$$

3° La dernière, en y posant $t=x+\frac{k}{b}$, donne :

(86) $$\int_{-\infty}^\infty e^{(bx^2+2kx)\sqrt{-1}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{(\frac{\pi}{4}-\frac{k^2}{b})\sqrt{-1}}.$$

4° Comme on a $\Gamma(1-\mu)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\mu\pi\cos\frac{1}{2}\mu\pi}$, si l'on fait de plus, dans la form. ($\alpha'''$, ($\beta'''$, $a=1-\mu$, on en déduira sans peine :

(87) $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\cos bx dx = \frac{\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{b^\mu}, \quad 0<\mu<1,$$

(88) $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin bx dx = \frac{\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi}{b^\mu}, \quad -1<\mu<1.$$

Ces deux dernières peuvent être remplacées par une formule unique, savoir :

$$(89)\qquad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{bx\sqrt{-1}}dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu}\, e^{\frac{1}{2}\mu\pi\sqrt{-1}}.$$

5° On a identiquement :

$$b^2\frac{y^a}{b^2+y^2}+y^2\frac{y^a}{b^2+y^2}=y^a;\qquad \text{donc :}$$

$$b^2\int_0^\infty \frac{y^a}{b^2+y^2}e^{-\alpha y}dy+\int_0^\infty \frac{y^{a+2}}{b^2+y^2}e^{-\alpha y}dy=\int_0^\infty y^a e^{-\alpha y}dy;$$

d'où, à cause des form. ($\alpha$) et ($\beta$) :

$$\Gamma(a)\cdot b^2\int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{(\alpha+x)^a}+\Gamma(a+2)\int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{(\alpha+x)^{a+2}}=\frac{\Gamma(a+1)}{\alpha^{a+1}}.$$

Donc, à cause de $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$, $\Gamma(a+2)=a(a+1)\Gamma(a)$, il vient :

$$(90)\qquad \int_0^\infty \left[\frac{b^2}{(\alpha+x)^a}+\frac{a(a+1)}{(\alpha+x)^a}\right]\cos bx dx=\frac{a}{\alpha^{a+1}}.$$

En partant de l'identité

$$b^2\frac{y^{a-1}}{b^2+y^2}+y^2\frac{y^{a-1}}{b^2+y^2}=y^{a-1},$$

et en opérant comme ci-dessus, on est conduit à :

$$(91)\qquad \int_0^\infty \left[\frac{b^2}{(\alpha+x)^a}+\frac{a(a+1)}{(\alpha+x)^{a+2}}\right]\sin bx dx=\frac{b}{\alpha^a}.$$

### 3^me Problème.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales :*

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{(a^2+x^2)^{n+1}},\quad \int_0^\infty \frac{x\sin bx}{(a^2+x^2)^{n+1}},$$

*Solution.* On a :

$$\int_0^\infty z^\mu e^{-(a^2+x^2)z}dx=\frac{\Gamma(\mu+1)}{(a^2+x^2)^{\mu+1}};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1}{(a^2+x^2)^{\mu+1}}=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^\infty z^\mu e^{-(a^2+x^2)z}dz.$$

Multiplions les deux membres de celle-ci par $\cos 2cxdx$, puis intégrons, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2cxdx}{(a^2+x^2)^{\mu+1}}=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^\infty \cos 2cxdx\int_0^\infty z^\mu e^{-(a^2+x^2)z}dz,$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^\infty z^\mu e^{-a^2z}dz\int_0^\infty e^{-zx^2}\cos 2cxdx,$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^\infty z^\mu e^{-a^2z}dz\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z}}e^{-\frac{c^2}{z^2}},$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\mu+1)}\int_0^\infty z^\mu e^{(a^2z+\frac{c^2}{z})}\frac{dz}{\sqrt{z}}. \qquad (\alpha)$$

En différentiant celle-ci par rapport à $c$, on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{x\sin 2cxdx}{(a^2+x^2)^{\mu+1}}=\frac{c\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\mu+1)}\int_0^\infty z^{\mu-1}e^{(a^2z+\frac{c^2}{z})}\frac{dz}{\sqrt{z}}. \qquad (\beta)$$

Mais soit $\varphi(cx+\frac{a}{x})=e^{-(cx+\frac{a}{x})}$ ; il vient :

$\varphi(x+2\sqrt{ac})=e^{-(x+2\sqrt{ac}}$ ; donc $\varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})=$

$$(-1)^n e^{-(x+2\sqrt{ac})},$$

$$\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x+2\sqrt{ac})\frac{dx}{\sqrt{x}}=(-1)^n e^{-2\sqrt{ac}}\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$=(-1)^n e^{-2\sqrt{ac}}\sqrt{\pi};$$

en fesant $n=n$, $n-1$, $n-2$, etc., les form. (61), (63) du 1[er] liv. donneront :

$$(\gamma)\quad \int_0^\infty \frac{1}{x^n}e^{-(cx+\frac{a}{x})}\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{c}}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\left[1+\frac{n(n-)1}{2(2\sqrt{ac})}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4(2\sqrt{ac})^2}+\text{etc.}\right]e^{-2\sqrt{ac}},$$

$$(\delta)\quad \int_0^\infty x^n e^{-(cx+\frac{a}{x})}\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{c}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{2}}\left[1+\frac{(n+1)n}{2(2\sqrt{ac})}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4(2\sqrt{ac})^2}+\text{etc.}\right]e^{-2\sqrt{ac}}.$$

Si l'on fait dans $(\alpha)$ et $(\beta)$, $\mu=n$, $2c=b$, on trouve par la form. $(\delta)$ :

$$(92)\quad \int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi e^{-ab}}{2a\cdot 1\cdot 2\ldots n}\left(\frac{b}{2a}\right)^n\left[1+\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{1}{ab}+\right.$$
$$\left.\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{(ab)^2}+\text{etc.}\right],$$

$$(93)\quad \int_0^\infty \frac{x\sin bx dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi e^{-ab}}{2\cdot 1\cdot 2\ldots n}\left(\frac{b}{2a}\right)^n\left[1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{ab}+\right.$$
$$\left.\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{(ab)^2}+\text{etc.}\right].$$

Pour $n=0$, on reproduit

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi e^{-ab}}{2a},\quad \int_0^\infty \frac{x\sin bx dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi e^{-ab}}{2}.$$

### 4me Problème.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales*

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)x^{\mu-1}e^{-ax}\cos bx dx,\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)x^{\mu-1}e^{-ax}\sin bx dx,$$

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)e^{-ax}\cos bx dx,\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)e^{-ax}\sin bx dx,$$

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)x^{\mu-1}e^{-ax}dx,\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)e^{-ax^2}dx.$$

*Solution.* On a :

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-mx}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{m^\mu}. \qquad (\alpha)$$

Différentions par rapport à $\mu$, on a :

$$\int_0^\infty \frac{d[x^{\mu-1}e^{-mx}dx]}{d\mu} = \frac{d[\frac{\Gamma(\mu)}{m^\mu}]}{m^\mu} = \frac{\frac{d\Gamma(\mu)}{d\mu}}{m^\mu} - \frac{\Gamma(\mu)\, l(m)}{m^\mu}. \qquad (\beta)$$

Mais on a par la form. (48) de Gauss :

$$\frac{d\Gamma(\mu)}{d\mu} = \Gamma(\mu)\left\{-c + \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}dx\right\},\ c = 0{,}5772156.\ \ldots$$

De plus $\dfrac{d(x^{\mu-1}e^{-mx}dx)}{d\mu} = e^{-mx}dx \cdot x^{\mu-1}l(x)$, donc $(\beta)$ devient :

$$\int_0^\infty l(x)x^{\mu-1}e^{-mx}dx = \frac{\Gamma(\mu)}{m^\mu}\left\{-c - lm + \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}dx\right\};$$

ou, en changeant les signes :

$$(94)\ \int_0^\infty l(\frac{1}{x})x^{\mu-1}e^{-mx}dx = \frac{\Gamma(\mu)}{m^\mu}\left\{c + lm - \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}dx\right\}.$$

Fesons ici $m = a + b\sqrt{-1} = \varsigma(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, il vient :

$$\int_0^\infty l(\frac{1}{x})x^{\mu-1}e^{-ax}e^{-bx\sqrt{-1}} = \frac{\Gamma(\mu)}{(a+b\sqrt{-1})^\mu}\left\{c + l(a+b\sqrt{-1}) - \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}dx\right\}.$$

Comme on a $\dfrac{1}{(a+b\sqrt{-1})^\mu} = \dfrac{1}{\varsigma^\mu}(\cos\mu\varphi - \sqrt{-1}\sin\mu\varphi)$,

$$l(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}l(a^2+b^2) + \text{arc tg}\frac{b}{a}\sqrt{-1}$$
$$= l\varsigma + \varphi\sqrt{-1},$$

la formule précédente donne :

$$\int_0^\infty l(\frac{1}{x})x^{\mu-1}e^{-ax}\cos bx dx - \sqrt{-1}\int_0^\infty l(\frac{1}{x})x^{\mu-1}\sin bx dx =$$

$$\frac{\Gamma(\mu)}{\varsigma^\mu}\cos\mu\varphi\left[c + l\varsigma - \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}dx\right] + \frac{\Gamma(\mu)}{\varsigma^\mu}\varphi\sin\mu\varphi -$$

$$\sqrt{-1}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\varsigma^\mu}\sin\mu\varphi\left\{c + l\varsigma - \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}dx\right\} - \frac{\Gamma(\mu)}{\varsigma^\mu}\varphi\cos\mu\varphi\right].$$

Cette équation, par la comparaison entre les termes réels et ceux affectés de $\sqrt{-1}$, se sépare en deux autres, savoir :

$$(95)\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)x^{\mu-1}e^{-ax}\cos bx dx = \frac{\Gamma(\mu)}{\varsigma^\mu}\left[\cos\mu\varphi\cdot l\varsigma + \varphi\sin\mu\varphi\right] + \frac{\Gamma(\mu)}{\varsigma^\mu}\cos\mu\varphi\left[c - \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}dx\right],$$

$$(96)\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)x^{\mu-1}e^{-ax}\sin bx dx = \frac{\Gamma(\mu)}{\varsigma^\mu}\left[\sin\mu\varphi\cdot l\varsigma - \varphi\cos\mu\varphi\right] + \frac{\Gamma(\mu)}{\varsigma^\mu}\sin\mu\varphi\left[c - \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}dx\right].$$

Si dans la form. (94) on pose $\mu=\frac{1}{2}$, $x=z^2$, elle donne :

$$(97)\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{z}\right)e^{-mz^2}dz = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\left[c + lm + 2\int_0^\infty \frac{dz}{1+z}\right] = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\left[c + lm + 2l2\right]. \qquad (\delta)$$

En fesant dans la même form. (94) $\mu=1$, elle se réduit à

$$(98)\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)e^{-mx}dx = \frac{1}{m}\left[c + lm\right].$$

Pour $m=a+b\sqrt{-1}$, celle-ci devient :

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)e^{-ax}\left(\cos bx - \sqrt{-1}\sin bx\right)dx = \frac{\varsigma}{\varsigma^2}\left(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\right)\left[c + l\varsigma + \varphi\sqrt{-1}\right];$$

d'où l'on tire :

$$(99)\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)e^{-ax}\cos bx dx = \frac{1}{\varsigma^2}\left[\varsigma\cos\varphi\, l\varsigma + \varphi\varsigma\sin\varphi + c\cdot\varsigma\cos\varphi\right] = \frac{1}{\varsigma^2}\left[ac + al\varsigma + b\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}\right],$$

$$(100)\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)e^{-ax}\sin bx dx = \frac{1}{\varsigma^2}\left[\varsigma\sin\varphi\cdot l\varsigma - \varphi\cdot\varsigma\cos\varphi + c\cdot\varsigma\sin\varphi\right] = \frac{1}{\varsigma^2}\left[bc + bl_{\varsigma} - a\cdot\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}\right].$$

En posant dans ($\delta$) $m=1$, il vient encore

(101) $$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{z}\right)e^{-z^2}dz=\tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,[c+2l2].$$

5^me^ Problème.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{\cos(p\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{dx}{x^q},\quad \int_0^\infty \frac{\sin(p\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{dx}{x^q},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos px\cos^{p-2}x\cot^q x\,dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin px\cos^{p-2}x\cot^q x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\cot^q x\,dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cot^q x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin px}{\sin x}\cos^{p-1}x\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^\mu x\,dx}{1-(2r-r^2)\cos^2 x},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^{\mu-1}x\,dx}{1-(2r-r^2)\cos^2 x}.$$

*Solution.* 1° Multiplions les deux membres de l'équation

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx=\frac{\Gamma(p)}{(a+b\sqrt{-1})^p}=\frac{\Gamma(p)(a-b\sqrt{-1})^p}{(a^2+b^2)^p},$$

par $\dfrac{db}{b^q}$, et intégrons entre les limites 0 et $\infty$, il viendra :

$$\Gamma(p)\int_0^\infty \frac{(a-b\sqrt{-1})^p}{(a^2+b^2)^p}\cdot\frac{db}{b^q}=\int_0^\infty \frac{db}{b^q}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx,$$

$$=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}dx\int_0^\infty \frac{e^{-b\sqrt{-1}x}db}{b^q},$$

$$=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}dx\int_0^\infty\left[\frac{\cos bx}{b^q}-\sqrt{-1}\,\frac{\sin bx}{b^q}\right]db,$$

$$\Gamma(p)\int_0^\infty \frac{(a-b\sqrt{-1}\,)^p}{(a^2+b^2)^p}\cdot\frac{db}{b^q} =$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}dx\times\frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)}\left[\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}-\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q}\right],$$

$$=\frac{1}{\Gamma(q)}\left[\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}-\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q}\right]\int_0^\infty x^{p+q-1-1}e^{-ax}dx,$$

$$=\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(q)\,a^{p+q-1}}\left[\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}-\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q}\right].$$

Mais on a $(a-b\sqrt{-1}\,)^p=\varsigma^p(\cos p\varphi-\sqrt{-1}\sin p\varphi)$, donc :

$$\int_0^\infty\frac{\cos(p\varphi)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{db}{b^q}-\sqrt{-1}\int_0^\infty\frac{\sin(p\varphi)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{db}{b^q}$$

$$=\frac{\Gamma(p+q-1)}{a^{p+q-1}\Gamma(p)\Gamma(q)}\left[\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}-\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi}\right];$$

d'où l'on tire, par la séparation des termes :

$$(102)\quad \int_0^\infty\frac{\cos(p\varphi)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{db}{b^q}=\frac{\Gamma(p+q-1)}{a^{p+q-1}\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},\quad 1>q>0$$

$$(103)\quad \int_0^\infty\frac{\sin(p\varphi)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{db}{b^q}=\frac{\Gamma(p+q-1)}{a^{p+q-1}\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi},\quad 2>q>0$$

On simplifiera ces équations en posant :

$\frac{b}{a}=x$, $db=adx$, car elles deviennent :

$$(104)\quad \int_0^\infty\frac{\cos(p\varphi)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{dx}{x^q}=\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},\quad 1>q>0$$

$$(105)\quad \int_0^\infty\frac{\sin(p\varphi)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{dx}{x^q}=\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi}.\quad 2>q>0$$

2° On peut réduire les limites $0,\infty$ à $0,\frac{\pi}{2}$, en posant dans ces dernières formules $x=\operatorname{tg}\varphi$, $dx=\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, $1+x^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}$;

car alors elles donneront :

$$(106)\quad (\alpha)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(p\varphi)\cos^{p-2}\varphi \cot^q\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}, \qquad 1>q>0$$

$$(107)\quad (\beta)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(p\varphi)\cos^{p-2}\varphi \cot^q\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi}.$$

3° En fesant dans celles-ci $p=2$, elles deviennent :

$$(108)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \cot^q\varphi\, d\varphi = \frac{q\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}, \qquad 1>q>0,$$

$$(109)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \cot^q\varphi\, d\varphi = \frac{q\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi}, \qquad 2>q>0.$$

La dernière de ces formules, en y posant $q=1$, revient à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\cos^{p-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}. \qquad (110)$$

Cette formule remarquable a été donnée par M. Liouville dans le *Journal de Crelle*, tom. 13, p. 232.

4° Si l'on fait $p=n$, nombre entier et positif, $q=\mu$ dans la form. ($\alpha$), et qu'on y pose :

$$\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{\Gamma(\mu+n-1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(n)} = \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-2)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1} = \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-2)}{1\cdot 2\ldots n-1},$$

cette formule deviendra :

$$(111)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi)^n \cos n\varphi \cdot \frac{\cot^\mu\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\, r^n \cdot \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\mu\pi}.$$

La formule ($\beta$) devient par les mêmes substitutions :

$$(112) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi)^n \sin n\varphi \cdot \frac{\cot^\mu \varphi d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)} r^n \cdot \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\mu\pi}.$$

5° Fesons dans ces deux équations $n=1, 2, 3, \ldots$ puis ajoutons il viendra :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(r\cos\varphi)\cos\varphi + (r\cos\varphi)^2\cos 2\varphi + \ldots] \frac{\cot^\mu\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi} = \left\{1+\frac{\mu}{1}r+\frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}r^2+\ldots\right\}\frac{r\pi}{2\cos\frac{1}{2}\mu\pi},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(r\cos\varphi)\sin\varphi + (r\cos\varphi)^2\sin 2\varphi + \ldots] \frac{\cot^\mu\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi} = \left\{1+\frac{\mu}{1}r+\frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}r^2+\ldots\right\}\frac{r\pi}{2\sin\frac{1}{2}\mu\pi}.$$

Si l'on remplace les séries des deux membres par leurs sommes, savoir :

$$(r\cos\varphi)\cos\varphi + (r\cos\varphi)^2\cos 2\varphi + \text{etc.} = \frac{(r\cos\varphi)\cos\varphi - (r\cos\varphi)^2}{1-2(r\cos\varphi)\cos\varphi + (r\cos\varphi)^2}$$

$$(r\cos\varphi)\sin\varphi + (r\cos\varphi)^2\sin 2\varphi + \text{etc.} = \frac{(r\cos\varphi)\sin\varphi}{1-2(r\cos\varphi) + (r\cos\varphi)^2},$$

$$1+\frac{\mu}{1}r+\frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}r^2 + \text{etc.} = \frac{1}{(1-r)^\mu},$$

Ces équations se changent en :

$$(113) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^\mu\varphi d\varphi}{1-(2r-r^2)\cos^2\varphi} = \frac{1}{(1-r)^{\mu+1}} \cdot \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\mu\pi}, \quad \begin{array}{l} 1>r>-1, \\ 1>\mu>-1, \end{array}$$

$$(114) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^{\mu-1}\varphi d\varphi}{1-(2r-r^2)\cos^2\varphi} = \frac{1}{(1-r)^{\mu}} \cdot \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\mu\pi}. \quad \begin{array}{l} 1>r>-1, \\ 2>\mu>0. \end{array}$$

## B.

## FONCTIONS Γ APPLIQUÉES A LA THÉORIE DES SUITES.

Les propriétés des fonctions gamma donnent le moyen de sommer un grand nombre de suites, et de calculer, par les sommes connues de séries convergentes, la valeur de plusieurs intégrales définies qu'il serait difficile d'obtenir par d'autres procédés. Voyez sur cette matière le *Calcul intégral* d'Euler, tom. I, chap. VIII, probl. 42; des Mémoires de M. Kummer, *Journal de Crelle*, t. 17 et 20; le Mémoire déjà cité de Gauss, 1812; le Mémoire cité de M. Binet, p. 307.

a) *Sommation des suites par l'emploi des fonctions gamma.*

### 1er Théorème.

*Soit la série convergente*

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}, \qquad (\alpha)$$

p *un nombre entier et positif, je dis que l'on aura :*

$$(115) \quad a_0 + \frac{p}{p+q} a_1 + \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} a_2 + \text{etc.} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\varphi(x)dx.$$

*Démonstration.* Multiplions l'équation $(\alpha)$ par $x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, puis intégrons entre les limites 0 et 1, on aura :

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\varphi(x)dx = a^0 \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx +$$

$$a_1 \int_0^1 x^{p+1-1}(1-x)^{q-1}dx + a_2 \int_0^1 x^{p+2-1}(1-x)^{q-1}dx + \text{etc.},$$

$$= a_0 \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} + a_1 \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+1+q)} + a_2 \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+2+q)} + \text{etc.},$$

$$= a_0 \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} + a_1 \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} + a_2 \frac{p(p+1)\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)(p+q+1)\Gamma(p+q)} + \text{etc.},$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \left\{ a_0 + \frac{pa_1}{p+q} + \frac{p(p+1)a_2}{(p+q)(p+q+1)} + \text{etc.} \right\};$$

d'où l'on tire la formule demandée. Les deux théorèmes suivants procèdent au fond de la formule (115), due à Euler.

## 2$^{me}$ Théorème.

*Soit la série convergente*

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots \qquad (\alpha)$$

*En supposant* $x < 1$, *soit* $f(ux^\mu)$ *la somme de la suite*

$$f(ux^\mu) = a_0 + a_1 ux^\mu + a_2 (ux^\mu)^2 + \ldots \qquad (\beta)$$

*dans laquelle* $\mu$ *est positif, si* $p$ *est un nombre entier et positif,* $\alpha$ *un nombre positif, je dis que l'on aura :*

$$(116) \quad \frac{a_0}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)} + \frac{a_1 u}{(\alpha+\mu)(\alpha+\mu+1)\ldots(\alpha+\mu+p-1)}$$

$$+ \frac{a_2 u^2}{(\alpha+2\mu)(\alpha+2\mu+1)\ldots(\alpha+2\mu+p-1)} + \text{etc.} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1} f(ux^\mu)\,dx.$$

*Démonstration.* Multiplions les deux membres de $(\beta)$ par $x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}dx$, puis intégrons entre les limites 0 et 1, on aura :

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}dx\, f(ux^\mu) = a_0 \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}dx +$$

$$a_1 u \int_0^1 x^{\alpha+\mu-1}(1-x)^{\mu-1}dx + a_2 u^2 \int_0^1 x^{\alpha+2\mu-1}(1-x)^{p-1}dx + \text{etc.},$$

$$= a_0 \frac{\Gamma(p)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(p+\alpha)} + a_1 u \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(\alpha+\mu)}{\Gamma(p+\alpha+\mu)} + a_2 u^2 \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(\alpha+2\mu)}{\Gamma(p+\alpha+2\mu)} + \text{etc.},$$

$$= \Gamma(p)\,[a_0 \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)\Gamma(\alpha)} +$$

$$a_1 u \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\mu)}{(\alpha+\mu)(\alpha+\mu+1)\ldots(\alpha+\mu+p-1)\Gamma(\alpha+\mu)} +$$

$$a_2 u^2 \frac{\Gamma(\alpha+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(\alpha+2\mu+1)\ldots(\alpha+2\mu+p-1)\Gamma(\alpha+2\mu)} + \text{etc.}\,],$$

$$=\Gamma(p)\left[\frac{a_0}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}+\frac{a_1u}{(\alpha+\mu)(\alpha+\mu+1)\ldots(\alpha+\mu+p-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{a_2u^2}{(\alpha+2\mu(\alpha+2\mu+1)\ldots(\alpha+2\mu+p-1)}+\text{etc.}\right];$$

d'où l'on tire la formule cherchée.

### Exemple.

Soit $f(u)=(1+u)^n=1+nu+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}u^2+\text{etc.},\quad 1>u>-1$

on a ici $a_0=1$, $a_1=n$, $a_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot2}$, etc.; on a donc par la form. (116) :

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}+\frac{nu}{(\alpha+\mu)(\alpha+\mu+1)\ldots(\alpha+\mu+p-1)}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}dx(1+ux^{\mu})^n.$$

Soient, en particulier, $\alpha=1$, $\mu=1$, $p=3$, $n=-1$, il vient :

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{u}{2\cdot3\cdot4}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot5}-\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{1\cdot2}\int_0^1 x^{1-1}(1-x)^{3-1}(1+ux)^{-1}dx,$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-2x+x^2)}{1+ux}dx,$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+ux}-\int_0^1\frac{xdx}{1+ux}+\tfrac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2dx}{1+ux},$$

$$=\frac{1}{2u}l(1+u)-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}l(1+u)+\frac{(u+1)^2}{2u^3}l(1+u)-\frac{3}{4u}-\frac{1}{2u^2},$$

$$=\frac{(u+1)^2}{2u^3}l(1+u)-\frac{3}{4u}-\frac{1}{2u^2}.$$

### 3^me Théorème.

*La série* $\mathrm{f(u)} = \mathrm{a_0} + \mathrm{a_1 u} + \mathrm{a_2 u^2} + \text{etc.}$ $(\alpha)$
*étant convergente, si, en supposant* $\mathrm{x} < 1$, *on désigne par* $\mathrm{f(ux)}$ *la somme de la suite*

$$\mathrm{f(ux)} = \mathrm{a_0} + \mathrm{a_1(ux)} + \mathrm{a_2(ux)^2} + \text{etc.}, \qquad (\beta)$$

*et par* $\mathrm{p}$ *un nombre entier et positif, on aura :*

$$(117) \quad a_0 + \frac{p}{q} a_1 u + \frac{p(p+1)}{q(q+1)} a_2 u^2 + \text{etc.}$$
$$= \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q-p)} \int_0^1 x^{\mathrm{p}-1}(1-x)^{\mathrm{q}-\mathrm{p}-1} \mathrm{f}(ux)dx.$$

*Démonstration.* $n$ étant un nombre entier on a :

$$\int_0^1 x^{\mathrm{p}+\mathrm{n}-1}(1-x)^{\mathrm{q}-\mathrm{p}-1}dx = \frac{\Gamma(p+n)\Gamma(q-p)}{\Gamma(q+n)}$$
$$= \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)} \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(q-p)}{\Gamma(q)}.$$

Multiplions les deux membres par $a_\mathrm{n} u^\mathrm{n}$, puis fesons $n = 0, 1, 2, 3$, etc., on trouve, en ajoutant les résultats :

$$\int_0^1 x^{\mathrm{p}-1}(1-x)^{\mathrm{q}-\mathrm{p}-1}\mathrm{f}(ux)dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q-p)}{\Gamma(q)} \left[ a_0 + \frac{p}{q} a_1 u + \frac{p(p+1)}{q(q+1)} a_2 u^2 + \text{etc.} \right]$$

### Exemple.

Soit $\mathrm{f}(u) = (1-u)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha u}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} u^2 + \text{etc.} \quad 1 > u > -1$

on aura : $a_\mathrm{n} = \frac{\alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n}$, et par (117) :

$$(\alpha) \quad 1 + \frac{\alpha p}{1 \cdot q} u + \frac{\Gamma(\alpha+1)p(p+1)}{1 \cdot 2 \cdot q(q+1)} u^2 + \text{etc.}$$
$$= \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q-p)} \int_0^1 x^{\mathrm{p}-1}(1-x)^{\mathrm{q}-\mathrm{p}-1}(1-ux)^{-\alpha}dx.$$

Pour $u=1$, le premier membre ne cesse pas d'être convergent, et l'on a :

$$1+\frac{\alpha p}{1\cdot q}+\frac{\alpha(\alpha+1)p(p+1)}{1\cdot 2\cdot q(q+1)}+\text{etc.}$$

$$=\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q-p)}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-p-\alpha-1}dx\,,$$

$$=\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q-p)}\times\frac{\Gamma(p)\Gamma(q-p-\alpha)}{\Gamma(q-\alpha)}\,,\quad q-p-\alpha>0$$

$$=\frac{\Gamma(q-p-\alpha)}{\Gamma(q-\alpha)}\,,\quad q-p-\alpha>0. \qquad (118)$$

Soit $\alpha=1$, celle-ci devient :

$$1+\frac{p}{q}+\frac{p(p+1)}{q(q+1)}+\text{etc.}=\frac{\Gamma(q)\Gamma(q-p-1)}{\Gamma(q-1)\Gamma(q-p)}\,,$$

$$=\frac{(q-1)\Gamma(q-1)\Gamma(q-p-1)}{\Gamma(q-1)\Gamma(q-p)\times(q-p-1)}\,,$$

$$=\frac{q-1}{q-p-1}\,,\quad q>p+1. \qquad (119)$$

Ces deux dernières sont dues à Gauss.

Les formules des théorèmes précédents se rapportent aux fonctions d'une seule variable; mais il n'est pas difficile d'étendre la série d'Euler du 1$^{er}$ théorème aux fonctions à deux et plusieurs variables. En effet, soit $f(u,v)$, fonction à deux variables, la somme de la série convergente :

$$\begin{aligned} f(u,v)=a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+\text{etc.},\\ +b_1v+b_2uv+b_3u^2v+\text{etc.},\\ +c_1v^2+c_2uv^2+\text{etc.},\\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Si $x$ est compris entre 0 et 1, il en sera de même de $x'=1-x$, par suite la série suivante restera encore convergente :

$$\begin{aligned} f(ux,vx')=a_0+a_1(ux)+a_2(ux)^2+a_3(ux)^3+\text{etc.}\\ +b_1(vx')+b_2(ux)(vx')+b_3(ux)^2(vx')+\text{etc.},\\ +c_1(vx')^2+c_2(ux)(vx')^2+\text{etc.},\\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Qu'on multiplie celle-ci par $x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, on obtient en intégrant entre 0 et 1,

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx f(ux,vx') = a_0\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx +$$

$$a_1 u\int_0^1 x^{p+1-1}(1-x)^{q-1}dx + a_2u^2\int_0^1 x^{p+2-1}(1-x)^{q-1}dx + \text{etc.}$$

$$+ b_1 v\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1-1}dx + b_2 uv\int_0^1 x^{p+1-1}(1-x)^{q+1-1}dx +$$

$$+ b_3u^2v\int_0^1 x^{p+2-1}(1-x)^{q+1-1}dx + \text{etc.} + c_1v^2\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+2-1}dx$$

$$+ c_2uv^2\int_0^1 x^{p+1-1}(1-x)^{q+2-1}dx + \text{etc.}$$

$$+ \text{etc.},$$

$$= a_0\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} + au_1\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} + a_2u^2\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)} + \text{etc.}$$

$$+ b_1v\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{L(p+q+1)} + b_2uv\cdot\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} + b_3u^2v\cdot\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+3)}$$
$$+ \text{etc.}$$

$$+ c_1u^2\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+2)}{\Gamma(p+q+2)} + c_2uv^2\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+2)}{\Gamma(p+q+3)} + \text{etc.}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\left\{ a_0 + \frac{p}{p+q}a_1u + \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}a_2u^2 + \text{etc.}\right.$$

$$+ \frac{q}{p+q}b_1v + \frac{pq}{(p+q)(p+q+1)}b_2uv + \frac{p(p+1)q}{(p+q)(p+q+1)(p+q+2)}$$
$$b_3u^2v + \text{etc.}$$

$$\left. + \frac{q(q+1)}{(p+q(p+q+1)}c_1v^2 + \frac{p\cdot q(q+1)}{(p+q)(p+q+1)(p+q+2)}c_2uv^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$(120)$$

On étendra aisément cette formule au cas de 3 etc. variables.

### b) *Détermination de la valeur des intégrales définies par la sommation des suites.*

On a, par la form. (117)

$$\mathrm{f}(ux) = a_0 + a_1(ux) + \text{etc.} \qquad (\alpha)$$

$$\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p)\Gamma(p-q)}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-p-1}\mathrm{f}(ux)dx = a_0 + \frac{p}{q}a_1u + \frac{p(p+1)}{q(q+1)}a_2u^2 + \text{etc.}; \qquad (\beta)$$

donc si on détermine les coëfficients $a_0$, $a_1$, $a_2$, etc., de manière qu'on puisse sommer les suites $(\alpha)$ et $(\beta)$, on aura la valeur de l'intégrale définie qui compose le premier membre de la form. $(\beta)$.

### 1^er^ Exemple.

Fesons dans les form. $(\alpha)$ et $(\beta)$, $u=1$, $x=\sin^2 z$, $\mathrm{f}(\sin^2 z)=\varphi(z)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -\dfrac{q\cdot q}{\frac{1}{2}\cdot 1}$; $a_2 = \dfrac{q(q-1)\cdot q(q+1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2}$, etc., on trouve,

$$(\alpha') \quad \varphi(z) = 1 - \frac{q^2}{1\cdot 2}(2\sin z)^2 + \frac{q^2(q^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2\sin z)^4 - \text{etc.} = \cos(2qz),$$

$$(\beta') \quad \frac{2\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q-p)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}z\cos^{2q-2p-1}z\cos(2qz)dz =$$

$$1 - \frac{q\cdot p}{\frac{1}{2}\cdot 1} + \frac{q(q-1)p(p+1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2} - \text{etc.} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-p+q)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q)\Gamma(\frac{1}{2}-p)}. \text{ [form. (118)]}$$

*Corollaire.* Soient ici $p=\dfrac{\mu}{2}$, $q=\dfrac{\mu+\varsigma}{2}$, on aura, à cause de

$$\Gamma(q)\Gamma(q+\tfrac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{2}-2q}\sqrt{2\pi}\,\Gamma(2q),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-1}z\cos^{\varsigma-1}z\cos(\mu+\varsigma)z\,dz = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\varsigma)}{\Gamma(\mu+\varsigma)}\cos\tfrac{1}{2}\mu\pi, \quad 1 > \tfrac{1}{2}\mu > 0. \qquad (121)$$

Soit $z=\dfrac{\pi}{2}-y$, et $\mu$ changé en $\varsigma$ et vice-versâ,

cette dernière deviendra :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\varsigma-1}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cos^{\mu-1}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cos(\mu+\varsigma)\left(\frac{\pi}{2}-y\right)d\left(\frac{\pi}{2}-y\right)= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\varsigma)}{\Gamma(\mu+\varsigma)}\cos\tfrac{1}{2}\varsigma\pi\ ;$$

donc, en développant :

$$\cos(\mu+\varsigma)\frac{\pi}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\varsigma-1}y\sin^{\mu-1}y\cos(\mu+\varsigma)ydy +$$

$$\sin(\mu+\varsigma)\frac{\pi}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\varsigma-1}y\sin^{\mu-1}y\sin(\mu+\varsigma)ydy = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\varsigma)}{\Gamma(\mu+\varsigma)}\cos\tfrac{1}{2}\varsigma\pi\ ;$$

à la place de la seconde intégrale mettez sa valeur donnée par (121), puis changez $y$ en $z$, vous aurez :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mu-1}z\cos^{\varsigma-1}z\sin(\mu+\varsigma)zdz = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\varsigma)}{\Gamma(\mu+\varsigma)}\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi\ , \qquad 1>\tfrac{1}{2}\mu>0.$$

## 2<sup></sup>me Exemple.

Si nous posons dans les mêmes form. $(\alpha)$ et $(\beta)$,

$$p=\tfrac{1}{2},\ q=\varsigma,\ a_0=1,\ a_1=-\frac{\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\mu}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1},\ a_2=\frac{\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2}$$

etc.

$\varphi(z)=\cos\mu z$, on aura, par la form. de Gauss (118),

$$a_0+\frac{p}{q}a_1+\frac{p(p+1)}{q(q+1)}a_2+\text{etc.}=1-\frac{\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\mu}{2}}{1\cdot\varsigma}+$$

$$\frac{\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}{1\cdot 2\,\varsigma(\varsigma+1)}-\text{etc.}=\frac{\Gamma(\varsigma)\Gamma(\varsigma)}{\Gamma\left(\varsigma+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\varsigma-\frac{\mu}{2}\right)},$$

et par suite ($\beta$) devient :

$$\frac{2\Gamma(\varsigma)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\varsigma-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\varsigma-2}z\cos(\mu z)dz=\frac{\Gamma(\varsigma)\Gamma(\varsigma)}{\Gamma(\varsigma+\frac{\mu}{2})\Gamma(\varsigma-\frac{\mu}{2})}.$$

Posons ici $\varsigma=\frac{b+2}{2}$, il viendra :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos z)^b\cos(\mu z)dz=\frac{\pi\Gamma(b+1)}{\Gamma(1+\frac{b+\mu}{2})\Gamma(1+\frac{b-\mu}{2})}. \qquad (122)$$

Cette formule est due à Cauchy. (Voyez *Mémoire sur les Intégrales définies, prises entre limites imaginaires*, pag. 40).

### c) *Développement en série de la fonction* $f(x)=(1-2a\cos x+a^2)^{-s}$.

Cette fonction qui se présente fréquemment dans les questions de haute mécanique, notamment dans le problème sur l'attraction des sphéroïdes, a fait depuis Euler, le sujet des recherches des analystes les plus éminents, des Laplace (*Mécanique célèbre*, t. v, p. 335), Legendre (*Exercices de calcul intégral*, t. II, p. 227), Plana, Jacobi (*Journal de Crelle*). M. Hansen s'en est occupé tout récemment dans un Mémoire publié à Leipsic, 1849.

Nous donnerons le développement de cette fonction d'après Jacobi pour le cas seulement de $s=\frac{1}{2}$, et celui pour une valeur quelconque de $s$, en suivant la méthode de M. Binet, exposé dans le Mémoire cité, p. 331.

#### 1°

#### *Développement de la fonction* $(1-2a\cos x+a^2)^{-\frac{1}{2}}$ *suivant les cosinus des multiples de* x.

Conformément à la série de Fourier [3me liv. form. (47)] on a :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}=\tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\text{etc.},$$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx dx}{\sqrt{1-2ax+a^2}}$$

il s'agit d'intégrer $A_n$ ; à cet effet on a, par la transformation, liv. 1[er], form. (56),

$$\int_0^\pi \frac{\cos nx dx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}} = a^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} u du}{\sqrt{1-a^2\sin^2 u}}.$$

Mais on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2\cos^2 u}{1-a^2}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left[1-\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{1-a^2}\cos^2 u+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2\cos^4 u - \text{etc.}\right];$$

donc :

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} u du}{\sqrt{1-a^2\sin^2 u}} = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left[\sin^{2n} u du - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{1-a^2}\sin^{2n} u \cdot \cos^2 u du\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2 \sin^{2n} u \cdot \cos^4 u du - \text{etc.}\right].$$

Or, on a en général :

$$\int_0^\pi \sin^{2n} u \cos^{2p} u du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u \cos^{2p} u du,$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u)^{n-\frac{1}{2}}(1-\sin^2 u)^{p-\frac{1}{2}} 2\sin u \cos u du,$$

$$= \int_0^1 z^{n-\frac{1}{2}}(1-z)^{p-\frac{1}{2}} dz, \quad \text{en fesant } \sin^2 u = z;$$

$$= \int_0^1 z^{n+\frac{1}{2}-1}(1-z)^{p+\frac{1}{2}-1} dz,$$

$$= \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+p+1)},$$

$$= \frac{1\cdot3\cdot5\ldots 2n-1\sqrt{\pi}\cdot 1\cdot3\ldots 2p-1\sqrt{\pi}}{2^{n+p}1\cdot2\cdot3\ldots(n+p)},$$

$$= \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2p-1)}{(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2p)}\pi;$$

donc :

$$(123)\quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nx dx}{\sqrt{1-2a\cos x + a^2}} = \frac{2a^n}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} u du}{\sqrt{1-a^2\sin^2 u}},$$

$$= \frac{2a^n}{\pi\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\pi}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\times$$

$$\Sigma\left\{\frac{(-1)^p 1\cdot3\ldots2p-1}{2\cdot4\ldots2p}\cdot\frac{1\cdot3\ldots(2p-1)}{(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2p)}\cdot\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^p\right\};$$

$$= \frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots(2n)}\cdot\frac{2a^n}{\sqrt{1-a^2}}\left\{1-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+2}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3}{(2n+2)(2n+4)}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2 - \text{etc.}\right\}$$

2°.

*Développement de la fonction* $(1-2a\cos x + a^2)^{-s}$ *suivant les cosinus des multiples de* x.

Soit

$$f(x) = (1-2a\cos x + a^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + \text{etc.} + A_n\cos(n\theta) + \text{etc.}$$

Il s'agit d'avoir l'expression de $A_n$ en série convergente. Pour cela, développons par le binôme de Newton, les facteurs du produit $(1-2a\cos x + a^2)^{-s} = (1-ae^{x\sqrt{-1}})^{-s}(1-ae^{-x\sqrt{-1}})^{-s}$, et cherchons le coëfficient du terme du produit affecté de $\frac{e^{nx\sqrt{-1}}+e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} = \cos nx$; on trouvera pour ce coëfficient :

$$A_n = 2\left[\frac{a^n s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1\cdot2\ldots n} + a^{n+2}\cdot\frac{s\cdot s(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1\cdot2\cdot3\ldots n+1} + \right.$$

$$\left. a^{n+4}\frac{s(s+1)}{1\cdot2}\cdot\frac{s(s+1)\ldots(s+n+1)}{1\cdot2\ldots(n+2)} + \text{etc.}\right].$$

Mais on a, par la form. (12) :

$$B(s+h,t) = \frac{s(s+1)\ldots(s+h-1)}{(s+t)(s+t+1)\ldots(s+t+h-1)}B(s,t).$$

Si l'on fait ici $s+t=1$, $B(s,t) = B(s,1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$, $0<s<1$, on aura :

$$B(s+h,1-s) = \frac{s(s+1)\ldots(s+h-1)}{1\cdot2\ldots h}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi s)},\quad 0<s<1;$$

ou : $\int_0^1 x^{s+h-1}(1-x)^{1-s-1}dx = \frac{s(s+1)\ldots(s+h-1)}{1\cdot 2..h} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ ;

d'où : $$\frac{s(s+1)\ldots(s+h-1)}{1\cdot 2..h} = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}\int_0^1 x^{h+s-1}(1-x)^{1-s-1}dx. \qquad (\alpha)$$

Fesons $h = n,\ n+1,\ n+2$, etc., on aura :

$$A_n = 2\frac{a^n \sin(\pi s)}{\pi}\Big[\int_0^1 x^{n+s-1}dx(1-x)^{1-s-1} +$$

$$a^2 s\int_0^1 x^{n+s}dx(1-x)^{1-s-1} + a^4\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\int_0^1 x^{n+s+1}dx(1-x)^{1-s-1} + \text{etc.}\Big],$$

$$= \frac{2\sin(\pi s)}{\pi}\, a^n\int_0^1 x^{n+s-1}(1-x)^{-s}dx\,[\,1 + sa^2x + \frac{s(s+1)}{1\cdot 2}a^4x^2 + \text{etc.}\,],$$

$$= \frac{2\sin(\pi s)}{\pi}\, a^n\int_0^1 x^{n+s-1}(1-x)^{-s}dx\,[\,1 - a^2x\,]^{-s}. \qquad (124)$$

Cette formule suppose $0 < s < 1$. Si $s$ était plus grand que l'unité, il faudrait faire dépendre la fonction proposée $f(x)$ d'une autre dont l'exposant $s$ remplisse la condition $0 < s < 1$.

*Corollaire.* Lorsque $n$ devient un grand nombre la formule précédente prend une forme très-simple, car on a

$$1 - a^2x = 1 - a^2 + a^2(1-x) = (1-a^2)\,[\,1 + \frac{a^2(1-x)}{1-a^2}\,],$$

et en supposant $\frac{a^2}{1-a^2} \leqq 1$, il vient :

$$(1-a^2x)^{-s} = (1-a^2)^{-s}\,[\,1 - \frac{sa^2(1-x)}{1-a^2} + \frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\Big(\frac{a^2}{1-a^2}\Big)^2(1-x)^2 - \text{etc.}\,]$$

Multiplions les deux membres par $x^{n+s-1}dx(1-x)^{-s}$, et intégrons entre les limites $0$, $1$, on aura :

$$\tfrac{1}{2}A_n = \frac{\sin(s\pi)a^n}{\pi(1-a^2)^s}\Big[B(n+s, 1-s) - \frac{sa^2}{1-a^2}B(n+s, 2-s) +$$

$$\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\Big(\frac{a^2}{1-a^2}\Big)^2 B(n+s, 3-s) + \text{etc.}\,\Big],$$

$$= \frac{\sin(s\pi)a^n}{\pi(1-a^2)^s} B(n+s, 1-s) [1 - \frac{sa^2}{1-a^2} \cdot \frac{(1-s)}{n+1} + \frac{s(s+1)a^4}{2(1-a^2)^2} \frac{(1-s)(2-s)}{(n+1)(n+2)} - \text{etc.} ]$$

Mais on a :

$$B(n+s, 1-s) = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1\cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi s)}\,; \qquad \text{donc :}$$

$$(125) \quad \tfrac{1}{2} A_n = \frac{a^n}{(1-a^2)^s} \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1\cdot 2 .. n} [1 + s\frac{a^2}{1-a^2} \frac{(s-1)}{(n+1)} + \frac{s(s+1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{a^4}{(1-a^2)^2} \frac{(s-1)(s-2)}{(n+1)(n+2)} + \text{etc.} ]$$

Cette formule est due à Legendre. (*Exercices de Calcul intégral*, t. II, p. 277).

## 8^me SECTION.

### DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DÉFINIES AU MOYEN DE LA TRANSCENDANTE $li\cdot x = \int_0^x \frac{dx}{lx}$.

M. Soldner a publié à Munich, en 1809, une théorie et des tables de cette transcendante, qu'il appelle logarithme intégral; on peut donc s'en servir pour en faire dépendre les valeurs d'autres intégrales définies. A cet effet, il faut d'abord réduire l'intégrale

$$li\cdot x = \int_0^x \frac{dx}{lx} = l(\pm lx) + lx + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(lx)^2}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(lx)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.} + c\,,$$

$$c = 0{,}5772156\ \ldots,$$

à des limites constantes.

Le signe supérieur de $l(\pm lx)$ a lieu pour $x > 1$, le signe inférieur pour $x > 1$.

1° Dans $li\cdot\alpha = \int_0^\alpha \frac{dx}{lx}$, faites $x = \alpha y$, on aura

$$li\cdot\alpha = \alpha\int_0^1 \frac{dy}{l\alpha + ly}. \quad (\alpha)$$

2° Fesons dans ($\alpha$) $y = e^{-z}$, alors il vient :

$$li\cdot\alpha = -\alpha\int_{\infty}^{0}\frac{e^{-z}dz}{l\alpha - z} = \alpha\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-z}dz}{l\alpha - z}. \qquad (\beta)$$

3° Pour $\alpha = e^{u}$, $\alpha = e^{-u}$; celle-ci devient :

$$li\cdot\alpha = li(e^{u}) = e^{u}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-z}dz}{u - z}. \qquad (\gamma)$$

$$li\cdot\alpha = li(e^{-u}) = -e^{-u}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-z}dz}{u + z}. \qquad (\delta)$$

4° Pour $z = ux$, celles-ci se changent en :

$$li(e^{u}) = e^{u}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-ux}dx}{1 - x}, \qquad (\varepsilon)$$

$$li(e^{-u}) = -e^{-u}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-ux}dx}{1 + x}; \qquad (\eta)$$

tandis que l'on a en série

$$li(e^{u}) = c + lu + \frac{u}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{u^3}{1.2.3} + \text{etc.} \qquad (\zeta)$$

$$li(e^{-u}) = c + lu - \frac{u}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{u^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{u^3}{1.2.3} + \text{etc.} \qquad (\theta)$$

Cela posé, résolvons quelques problèmes.

## 1^er^ Problème.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales :*

$$\int_{0}^{\infty}u^{\mu-1}e^{-\alpha u}li(e^{u})du, \int_{0}^{\infty}u^{\mu-1}e^{-u}li(e^{u})du, \int_{0}^{\infty}e^{-2u}li(e^{u})du.$$

*Solution.* On a :

$$li(e^{u}) = e^{u}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-ux}dx}{1 - x}.$$

Multiplions par $u^{\mu-1}e^{-\alpha u}du$, et intégrons entre 0 et $\infty$, on a :

$$(126)\quad \int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-\alpha u}li(e^u)du = \int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-(\alpha-1)u}du\int_0^\infty \frac{e^{-ux}dx}{1-x}.$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x}\int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-(\alpha-1+x)u}du,$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x}\cdot\frac{\Gamma(\mu)}{(\alpha-1+x)^\mu},\quad \alpha \geqq 1$$

$$= \Gamma(\mu)\int_0^\infty \frac{dx}{(1-x)(\alpha-1+x)^\mu}.\quad \alpha \geqq 1$$

*Corollaire* 1. Soit $\alpha=1$, on a :

$$\int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-u}li(e^u)du = \Gamma(\mu)\int_0^\infty \frac{x^{1-\mu-1}dx}{1-x}.\qquad (\alpha)$$

Mais à cause de la formule (58), 2$^{me}$ livre,

$$(\beta)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} a\pi},\quad 1 \geqq a \geqq 0$$

il vient :

$$(127)\qquad \int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-u}li(e^u)du = -\frac{\pi\Gamma(\mu)}{\operatorname{tg}(\mu\pi)}.\quad 1 \geqq \mu \geqq 0$$

*Corollaire* 2. Soient $\alpha=2$, $\mu=1$, on trouve :

$$\int_0^\infty e^{-2u}li(e^u)du = \int_0^\infty \frac{dx}{(1-x)(1+x)},$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2},$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{2}-1}dz}{1-z},\ \text{pour } x=\sqrt{z};$$

$$= 0,\quad \text{d'après } (\beta).$$

## 2<sup></sup>me Problème.

*Chercher la valeur de chacune des intégrales :*

$$\int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-\alpha u}\,li(e^{-u})du,\ \int_0^\infty u^{\mu-1}e^{u}\,li(e^{-u})du,\ \int_0^\infty u^{\mu-1}\,li(e^{-u})du,$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u}\,li(e^{-u})du,\ \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha u}li(e^{-u})du,\ \int_0^\infty e^{-\alpha u^2}li(e^{-u^2})du.$$

*Solution.* Multiplions les deux membres de

$$li(e^{-u})=-e^{-u}\int_0^\infty \frac{e^{-ux}dx}{1+x},$$

par $u^{\mu-1}e^{-\alpha u}du$, et intégrons entre 0 et $\infty$, il vient :

$$\int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-\alpha u}li(e^{-u})du=-\int_0^\infty u^{\mu-1}\,e^{-(\alpha+1)u}du\int_0^\infty \frac{e^{-ux}dx}{1+x},$$

$$=-\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}\int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-(\alpha+1+x)u}du,$$

$$=-\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}\cdot\frac{\Gamma(\mu)}{(\alpha+1+x)^\mu},\quad \alpha\geqq-1$$

$$=-\Gamma(\mu)\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)(\alpha+1+x)^\mu}. \qquad (128)$$

*Corollaire* 1. Soit $\alpha=-1$, on a :

$$\int_0^\infty u^{\mu-1}e^{u}\,li(e^{-u})du=-\Gamma(\mu)\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^\mu},$$

$$=-\Gamma(\mu)\int_0^\infty \frac{x^{1-\mu-1}dx}{1+x},$$

$$=-\Gamma(\mu)\times\frac{\pi}{\sin(1-\mu)\pi},\quad 1\geqq\mu\geqq0$$

$$=-\frac{\pi\Gamma(\mu)}{\sin(\mu\pi)}. \qquad (129)$$

*Corollaire* 2. On peut donner à (128) une forme un peu

différente, en posant $\frac{1}{1+x}=z$, $x=\frac{1}{z}-1$, alors on obtient :

$$\int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-\alpha u}li(e^{-u})du=-\Gamma(\mu)\int_1^0\frac{dz}{z(\alpha+\frac{1}{z})^\mu},$$

$$=\Gamma(\mu)\int_0^1\frac{z^{\mu-1}dz}{(1+\alpha z)^\mu},\quad \alpha\geqq-1 \qquad (130)$$

*Corollaire* 3. Pour $\alpha=0$, celle-ci donne

$$\int_0^\infty u^{\mu-1}\,li(e^{-u})du=\frac{\Gamma(\mu)}{\mu}. \qquad (131)$$

Pour $\mu=1$, la même donne

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u}\,li(e^{-u})du=\int_0^1\frac{dz}{\alpha z+1},$$

$$=\frac{l(1+\alpha)}{\alpha}.\quad \alpha\geqq-1 \qquad (132)$$

Pour $\mu=\frac{1}{2}$, la même conduit à :

$$\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha u}\,li(e^{-u})du=\Gamma(\tfrac{1}{2})\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{z(1+\alpha z)}};$$

soit $z=x^2$, on a :

$$\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha u}li(e^{-u})du=\Gamma(\tfrac{1}{2})^2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2}}.$$

1° Soit $\alpha>0$, on a :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(x+\sqrt{\frac{1}{\alpha}+x^2}\right)+c,$$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2}}=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\left[l\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\alpha}}\right)-l\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)\right],$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\,l\left[\sqrt{\alpha}+\sqrt{1+\alpha}\right].$$

Donc :

$$\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha u}\,li(e^{-u})du=\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\,l\left[\sqrt{\alpha}+\sqrt{1+\alpha}\right];\quad \alpha>0$$

remplaçons $u$ par $u^2$, on a :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u^2} li(e^{-u^2})du = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, l(\sqrt{\alpha} + \sqrt{1+\alpha}), \quad \alpha > 0 \quad (133)$$

2° Soit $\alpha < 0$, on trouvera, par des procédés semblables :

$$\int_0^\infty e^{\alpha u^2} li(e^{-u^2})du = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \text{arc sin}\sqrt{\alpha}, \quad \alpha < 1. \quad (134)$$

*Corollaire 4.* Fesons dans (132), $\alpha = a + b\sqrt{-1}$, en observant que $l(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} l(a^2+b^2) + \sqrt{-1}\,\text{arc tg}\frac{b}{a}$, il vient, en séparant les termes réels et imaginaires :

$$\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\, li(e^{-u})du = -\frac{a\,l\sqrt{(1+a)+b^2} + b\,\text{arc tg}\frac{b}{1+a}}{a^2+b^2}, \quad (135)$$

$$\int_0^\infty e^{-au}\sin bu\, li(e^{-u})du = -\frac{b\,l\sqrt{(1+a)^2+b^2} - a\,\text{arc tg}\frac{b}{1+a}}{a^2+b^2}. \quad (136)$$

Pour $a = 0$, celles-ci deviennent :

$$\int_0^\infty \cos bu\, li(e^{-u})du = -\frac{\text{arc tg}\, b}{b}, \quad \int_0^\infty \sin bu\, li(e^{-u})du = -\frac{l(1+b^2)}{2b}.$$

Voyez sur cette matière l'ouvrage de M. Schlömilch (*Beiträge zur Theo. bestim. Integ.* Iéna, 1843, p. 70, etc.)

FIN DU QUATRIÈME LIVRE.

# V$^{me}$ LIVRE.

—

# RÉDUCTION DES INTÉGRALES DÉFINIES MULTIPLES.

Il s'agira dans ce livre de la réduction des intégrales multiples en intégrales simples ou doubles, dans les cas où les limites des intégrales sont constantes ou bien variables, et données par une équation de condition.

## A. RÉDUCTION DES INTÉGRALES MULTIPLES A LIMITES CONSTANTES.

### PROBLÈME FONDAMENTAL.

*Soient* $u_x$, $u_y$, $u_z$, etc., $v_x$, $v_y$, $v_z$, etc. *respectivement des fonctions de* x, *de* y, *de* z, etc. $u_0$ *une constante, soient de plus*

$$u = u_0 + u_x + u_y + u_z + \text{etc.}, \qquad (1)$$

$$v = v_x \cdot v_y \cdot v_z \ldots, \qquad (2)$$

*et* $\mu$ *une quantité positive; on demande de réduire en une intégrale simple, l'intégrale multiple*

$$S = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \int_\varepsilon^\eta \ldots \frac{v dx dy dz \ldots}{u^\mu}. \qquad (3)$$

*Solution.* Comme on a :

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-ut} dt = \frac{\Gamma(\mu)}{u^\mu},$$

on aura : $$\frac{1}{u^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-ut} dt.$$

Substituons cette valeur dans (3) ; on aura :

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-ut} dt \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \int_\varepsilon^\eta \ldots\ v\, dx dy dz. \ \ldots \qquad (\alpha)$$

Si nous mettons ici pour $u$ et $v$, respectivement leurs valeurs (1) et (2), l'équation $(\alpha)$ devient :

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-(u_0 + u_x + u_y + u_z + \text{etc.})t} dt \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \int_\varepsilon^\eta \ldots v_x v_y v_z \ldots dx dy dz,$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-u_0 t} dt \int_\alpha^\beta v_x e^{-u_x t} dt \int_\gamma^\delta v_y e^{-u_y t} dy \int_\varepsilon^\eta v_z e^{-u_z t} dz \ \ldots \qquad (\beta)$$

Les intégrales étant séparées, supposons que chacune puisse se déterminer par les méthodes connues, et que l'on ait en particulier :

$$\int_\alpha^\beta v_x e^{-u_x t} dx = \varphi(t),\ \int_\gamma^\delta v_y e^{-u_y t} dy = \psi(t),\ \int_\varepsilon^\eta v_z e^{-u_z t} dz = \chi(t)\ , \text{ etc.}$$

l'équation $(\beta)$ deviendra :

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \varphi(t) \psi(t) \chi(t) \ldots t^{\mu-1} e^{-u_0 t} dt. \qquad (\beta)$$

L'on voit que cette méthode générale de réduction se rattache, quant au fond, à la seconde méthode de Cauchy pour la détermination des intégrales définies. Appliquons le procédé suivi dans la solution du problème fondamental à quelques cas particuliers très-généraux dans leur espèce.

### 1er Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \frac{x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} \ldots e^{-(ax+by+cz+\ldots)}}{(k + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)^\mu} dx dy dz \ldots \qquad (\alpha)$$

*Solution.* On a ici :

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-(k+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\mu} dt = \frac{\Gamma(\mu)}{(k + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)^\mu}\ ;$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1}{(k+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^{\mu}}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-(k+\alpha x+\beta y+\gamma z\ldots)t}dt.$$

En substituant cette expression dans l'intégrale proposée ($\alpha$), on obtient, en séparant les variables :

$$S=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-kt}dt\int_0^\infty x^{m-1}e^{-(a+\alpha t)x}dx$$

$$\int_0^\infty y^{n-1}e^{-(b+\beta t)y}dy\int_0^\infty z^{p-1}e^{-(c+\gamma t)z}dz\ldots$$

Mais on a :

$$\int_0^\infty x^{m-1}e^{-(a+\alpha t)x}dx=\frac{\Gamma(m)}{(a+\alpha t)^{m}},$$

$$\int_0^\infty y^{n-1}e^{-(b+\beta t)y}dy=\frac{\Gamma(n)}{(b+\beta t)^{n}},$$

$$\int_0^\infty z^{p-1}e^{-(c+\gamma t)z}dz=\frac{\Gamma(p)}{(c+\gamma t)^{p}},$$

etc., etc.

par là l'équation précédente devient :

$$S=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)\ldots}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\frac{t^{\mu-1}e^{-kt}dt}{(a+\alpha t)^{m}(b+\beta t)^{n}(c+\gamma t)^{p}\ldots}. \qquad (4)$$

### 1er Corollaire.

Si la formule (4) ne contenait que la seule variable $x$, elle se réduirait à :

$$\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{(k+\alpha x)^{\mu}}e^{-ax}=\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\frac{t^{\mu-1}e^{-kt}dt}{(a+\alpha t)^{m}}. \qquad (5)$$

Changeons dans cette dernière $t$ en $x$, et posons $a=1$, $k=1$, elle deviendra :

$$\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{(1+\alpha x)^{\mu}}e^{-x}=\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\frac{x^{\mu-1}dx}{(1+\alpha x)^{m}}e^{-x}.$$

Différentions celle-ci par rapport à $m$, on aura :

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} lx\,dx}{(1+\alpha x)^\mu} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{(1+\alpha x)^m}\, l\left(\frac{1}{1+\alpha x}\right) e^{-x} + \frac{\frac{d\Gamma(m)}{dm}}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{(1+\alpha x)^m}\, e^{-x}.$$

Mais on a [IV$^e$ liv., form. (48)] :

$$\frac{d\Gamma(m)}{dm} = \Gamma(m)\frac{d\,l\Gamma(m)}{dm} = \Gamma(m)\left[-c+\int_0^1 \frac{1-x^{m-1}}{1-x}\,dx\right];$$

donc :

$$(6)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1} lx\,dx}{(1+\alpha x)^\mu} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{(1+\alpha x)^m}\, l\left(\frac{1}{1+\alpha x}\right) e^{-x} + \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\mu)}\left[-c+\int_0^1 \frac{1-x^{m-1}}{1-x}\,dx\right] \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{(1+\alpha x)^m}\, e^{-x}.$$

### 2$^{me}$ Corollaire.

Faites, dans la form. (4), $a=b=c=\ldots=0$, vous aurez :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots \frac{x^{m-1}y^{n-1}z^{p-1}\ldots}{(k+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^\mu}\,dx\,dy\,dz\,\ldots$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)\ldots}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{t^{\mu-1}e^{-kt}dt}{(\alpha t)^m(\beta t)^n(\gamma t)^p\ldots},$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)\ldots}{\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-m-n-p-\ldots-1}e^{-kt}dt,$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)\ldots}{\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots}\cdot\frac{\Gamma(\mu-m-n-p\ldots)}{\Gamma(\mu)k^{\mu-m-n-p-\ldots}}. \qquad (7)$$

### 3$^{me}$ Corollaire.

On peut donner à la formule (7) une forme un peu plus générale, en introduisant à la place des variables primitives $x, y, z,\ldots,$

les nouvelles variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, liées aux premières par les équations $x=\xi^q,\ y=\eta^r,\ z=\zeta^s,\ldots$

On obtiendra par là :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\frac{x^{m-1}y^{n-1}z^{p-1}\ldots}{(k+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^\mu}dx\,dy\,dz\ldots$$

$$=qrs\ldots\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\frac{\xi^{qm-1}\eta^{rn-1}\zeta^{sp-1}\ldots}{(k+\alpha\xi^q+\beta\eta^r+\gamma\zeta^s+\ldots)^\mu}d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)\ldots}{\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots}\cdot\frac{\Gamma(\mu-m-n-p-\ldots)}{\Gamma(\mu)k^{\mu-m-n-p-}}.$$

Posons dans cette équation

$$m=\frac{m'}{q},\ n=\frac{n'}{r},\ p=\frac{p'}{s},\ \alpha=a^q,\ \beta=b^r,\ \gamma=c^s,$$

$k=1$ ; remplaçons ensuite $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, par $x, y, z, \ldots$, puis ôtons les accents, il viendra :

$$(8)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\frac{x^{m-1}y^{n-1}z^{p-1}\ldots}{[1+(ax)^q+(by)^r+(cz)^s+\ldots]^\mu}dx\,dy\,dz\ldots$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{m}{q})\Gamma(\frac{n}{r})\Gamma(\frac{p}{s})\ldots}{qrs\ldots\Gamma(\mu)a^m b^n c^p\ldots}\Gamma(\mu-\frac{m}{q}-\frac{n}{r}-\frac{p}{s}-\ldots)$$

### 4^me Corollaire.

Fesons dans la form. (4) $k=0$, on aura :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\frac{x^{m-1}y^{n-1}z^{p-1}\ldots}{(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^\mu}e^{-(ax+by+cz+\ldots)}dx\,dy\,dz\ldots$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)\ldots}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\frac{t^{\mu-1}dt}{(a+\alpha t)^m(b+\beta t)^n(c+\gamma t)^p\ldots}.$$

Ici l'intégration indiquée dans le second membre pourra s'effectuer ; en effet, si l'on décompose la fonction rationnelle $\frac{1}{(a+\alpha t)^m(b+\beta t)^n(c+\gamma t)^p\ldots}$ en fractions simples, on aura une

suite d'intégrales à déterminer de la forme $\int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}dt}{(g+ft)^u}$. Mais en posant $t=\frac{g}{f}x$, cette intégrale devient :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1+x)^u}=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(u-\lambda)}{\Gamma(u)}.$$

5^me^ Corollaire.

Si dans l'équation (4) $\mu, m, n, p, \ldots$ sont des nombres entiers et positifs, on pourra effectuer l'intégration indiquée dans le second membre. Car alors l'intég. $\int_0^\infty \frac{t^{\mu-1}e^{-kt}dt}{(a+\alpha t)^m(b+\beta t)^n(c+\gamma t)^p\ldots}$ se décompose en une suite d'intégrales de la forme $\int_0^\infty \frac{t^{\nu-1}dt}{(g+ft)^u}e^{-kt}$; ou, en posant $\nu-1=\lambda$, $\frac{g}{f}=\theta$, en une suite d'intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{t^\lambda dt}{(\theta+t)^{u+1}}e^{-kt},$$

qui se déterminent par le procédé de la form. (41) du II^me^ liv.

2^me^ Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\frac{l(\frac{1}{x})l(\frac{1}{y})l(\frac{1}{z})\ldots}{(k+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^\mu}dx\,dy\,dz\ldots$$

*Solution.* On a, par la form. (99) du IV^me^ liv. :

$$\int_0^\infty l(\frac{1}{x})e^{-ax}\cos bx dx=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\tfrac{1}{2}al(a^2+b^2)+b\cdot\text{arc tg}\frac{b}{a}+ac\right],$$
$$c=0,577\ldots$$

Pour $b=0$, il vient :

$$\int_0^\infty l(\frac{1}{x})e^{-ax}dx=\frac{la+c}{a}. \qquad (\alpha)$$

Comme on a de plus :

$$\frac{1}{(k+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^{\mu}}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-(k+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)t}dt\,, \qquad (\beta)$$

on obtient d'abord :

$$S=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-kt}dt\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\alpha tx}dx$$

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{y}\right)e^{-\beta ty}dy\int_0^\infty l\left(\frac{1}{z}\right)e^{-\gamma tz}dz\ldots \qquad (\gamma)$$

Mais à cause de la form. ($\alpha$), on a :

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\alpha tx}dx=\frac{c+l\alpha+lt}{\alpha t}=\frac{a+lt}{\alpha t},\ a=c+l\alpha,$$

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{y}\right)e^{-\beta ty}dy=\frac{c+l\beta+lt}{\beta t}=\frac{b+lt}{\beta t},\ b=c+l\beta,$$

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{z}\right)e^{-\gamma tz}dz=\frac{c+l\gamma+lt}{\gamma t}=\frac{c+lt}{\gamma t},\ c=c+l\gamma.$$

etc. etc. etc. etc.

En substituant ces valeurs dans la relation ($\gamma$), on obtient :

$$S=\frac{1}{\Gamma(\mu)\cdot\alpha\beta\gamma\ldots}\int_0^\infty t^{\mu-n-1}dt\,e^{-kt}(a+lt)(b+lt)(c+lt)\ldots \qquad (9)$$

Dans les problèmes précédents on a basé la réduction des intégrales multiples sur la propriété des fonctions gamma

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}}\,;$$

on peut aussi, dans le même but, se servir de la formule de Fourier (110′), liv. III$^{me}$, pour $\alpha=0$, $\beta=\infty$, savoir :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\cos\alpha(x-\mu)\,f(\mu)\,d\alpha\,d\mu.$$

Le problème suivant, traité par Cauchy (*Journal de l'Ecole polytechnique*, cah. 19), montrera l'usage de cette méthode.

### 3me Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots f(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots) \cos a\alpha \cos b\beta \ldots d\alpha\, d\beta \ldots \qquad (\alpha)$$

n *étant le nombre des variables* $\alpha, \beta, \ldots$

*Solution.* On a par la formule citée de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos \alpha(x-\mu)\, f(\mu)\, d\alpha\, d\mu. \qquad (\beta)$$

Soient $\alpha = \theta^2$, $\mu = \tau^2$, les limites des deux intégrales ne changeront pas, et l'équation $(\beta)$ devient :

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(\theta^2)(x - \tau^2)\, f(\tau^2)\, \theta d\theta\, \tau d\tau. \qquad (\gamma)$$

Soit $x = \alpha^2 + \beta^2 + \ldots$, celle-ci devient :

$$f(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(\theta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots - \tau^2) f(\tau^2)\, \theta d\theta\, \tau d\tau. \quad (\delta)$$

En substituant cette valeur dans $(\alpha)$, on obtient :

$$S = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(\theta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots - \tau^2) \cos a\alpha \cos b\beta \ldots \, d\alpha\, d\beta \ldots f(\tau^2)\, \theta d\theta\, \tau d\tau,$$

$=$ à la partie réelle de

$$\frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\theta^2(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots - \tau^2)\sqrt{-1}} \cos a\alpha \cos \beta b \ldots f(\tau^2)\, d\alpha\, d\beta \ldots \, \theta d\theta\, \tau d\tau.$$

$=$ à la partie réelle de

$$\frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta^2\alpha^2\sqrt{-1}} \cos a\alpha d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta^2\beta^2\sqrt{-1}} \cos b\beta d\beta \ldots$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\theta^2\tau^2\sqrt{-1}} f(\tau^2)\, \theta d\theta\, \tau d\tau. \qquad (\varepsilon)$$

Mais on a, par la form. (86) du IV$^{me}$ liv. :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(ax^2+bx)\sqrt{-1}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}} \cdot e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}};$$

ou, en développant les exponentielles $e^{bx\sqrt{-1}}$, $e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2\sqrt{-1}} \cos bx dx + \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2\sqrt{-1}} \sin bx dx =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}} \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}} \sin\frac{\pi}{4};$$

d'où l'on tire, à cause de $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$,

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2\sqrt{-1}} \cos bx dx =$ à la partie réelle de

$$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}(1+\sqrt{-1})e^{-\frac{b^2}{4a}\sqrt{-1}}.$$

On a donc, d'après cette formule :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta^2\alpha^2\sqrt{-1}} \cos a\alpha d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{\theta} e^{-\frac{a^2}{4\theta^2}\sqrt{-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta^2\beta^2\sqrt{-1}} \cos b\beta d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{\theta} e^{-\frac{b^2}{4\theta^2}\sqrt{-1}},$$

etc. etc.

En substituant ces valeurs dans (ε), et en considérant que le nombre des variables $\alpha, \beta$, etc., est $n$, on obtient :

S = à la partie réelle de

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{(1+\sqrt{-1})^n}{\theta^n} e^{-\left(\frac{a^2+b^2+..}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\theta^2\tau^2\sqrt{-1}} f(\tau^2)\theta d\theta \tau d\tau,$$

S = à la partie réelle de

$$4\pi^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^n \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\theta^2\tau^2\sqrt{-1}} e^{-\left(\frac{a^2+b^2+..}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}} \frac{d\theta}{\theta^{n-1}} \tau d\tau\, f(\tau^2). \quad (\eta)$$

Mais on a :

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{-1}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^n = \left(\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right)^n = e^{\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}};$$

donc :

S = à la partie réelle de

$$4\pi^{\frac{n}{2}-1}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}}e^{-\theta^2\tau^2\sqrt{-1}}e^{-\left(\frac{a^2+b^2+\ldots}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}}\mathrm{f}(\tau^2)\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\tau d\tau,$$

= à la partie réelle de

$$4\pi^{\frac{n}{2}-1}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\left\{\frac{n\pi}{4}-\theta^2\tau^2-\frac{a^2+b^2+\ldots}{4\theta^2}\right\}\sqrt{-1}}\mathrm{f}(\tau^2)\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\tau d\tau. \qquad (\theta)$$

Donc, en développant ici l'exponentielle, on a, en rejetant la partie imaginaire du développement :

$$S = 4\pi^{\frac{n}{2}-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\left(\frac{n\pi}{4}-\theta^2\tau^2-\frac{a^2+b^2+\ldots}{4\theta^2}\right)\mathrm{f}(\tau^2)\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\tau d\tau. \qquad (10)$$

Cette formule fait dépendre, comme l'on voit, l'intégrale multiple proposée d'une intégrale double. Cependant lorsque $n$ est impair, on peut, ainsi que nous le ferons voir maintenant, pousser la réduction plus loin. En effet, la form. ($\eta$), en posant $s = a^2+b^2+\ldots$, peut s'écrire :

S = à la partie réelle de

$$4\pi^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^n\int_0^\infty \mathrm{f}(\tau^2)\tau d\tau\int_0^\infty e^{-\left(\theta^2\tau^2+\frac{s}{4\theta^2}\right)\sqrt{-1}}\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}. \qquad (\zeta)$$

Mais on a, par la form. (55) du 2me liv. :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)\sqrt{-1}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}(1-\sqrt{-1})e^{-2\sqrt{-ab}}.$$

En différentiant $n$ fois de suite les deux membres de cette formule on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)\sqrt{-1}}\frac{dx}{x^{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cdot\frac{1-\sqrt{-1}}{(-\sqrt{-1})^n}\cdot\frac{d^n e^{-2\sqrt{-ab}}}{db^n}.$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}(1-\sqrt{-1})\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-2\sqrt{-ab}}\left\{1-\frac{n(n-1)}{1}\frac{1}{4\sqrt{ab}}-\right.$$

$$\left.\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{4\sqrt{ab}}\right)^2+\ldots\right\}.$$

Donc, à cause de $n$ impair, si nous posons $n-1=2n'$, $\frac{n-1}{2}=n'$, si nous fesons de plus $a=t^2$, $b=\frac{s}{4}$, on aura :

$$\int_0^\infty e^{-(\theta^2\tau^2+\frac{s}{4\theta^2})\sqrt{-1}}\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau^2}}\cdot\frac{1-\sqrt{-1}}{(-\sqrt{-1})^{n'}}\frac{d^{n'}e^{-\tau\sqrt{s}\sqrt{-1}}}{d\left(\frac{s}{4}\right)^{n'}},$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\tau\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{-1}}{(-1)^{n'}(\sqrt{-1})^{n'}}\cdot\frac{d^{n'}\cdot e^{-\tau\sqrt{s}\sqrt{-1}}}{\frac{1}{2^{2n'}}ds^{n'}},$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}}{(\sqrt{-1})^{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\tau}\cdot\frac{d^{\frac{n-1}{2}}e^{-\tau\sqrt{s}\sqrt{-1}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}};$$

par conséquent la form. ($\zeta$) devient :

S = à la partie réelle de

$$4\pi^{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^n\cdot\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}}{(\sqrt{-1})^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\int_0^\infty f(\tau^2)d\tau\cdot\frac{d^{\frac{n-1}{2}}e^{-\tau\sqrt{-1}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Mais on a :

$$\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}=e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},\qquad\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^n=e^{\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}=e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}},\quad\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{n-1}{2}}=e^{-\frac{(n-1)\pi}{4}\sqrt{-1}};$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{n-1}{2}} = e^{\left[\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{(n-1)\pi}{4}\right]\sqrt{-1}}$$

$$= e^0 = 1,$$

donc : S = à la partie réelle de

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty \frac{d^{\frac{n-1}{2}} e^{-\tau\sqrt{s}\sqrt{-1}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}} f(\tau^2) d\tau.$$

Si l'on développe l'exponentielle, et qu'on supprime la partie imaginaire, on a :

$$S = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{d^{\frac{n-1}{2}} \cos \tau\sqrt{s}}{ds^{\frac{n-1}{2}}} f(\tau^2) d\tau,$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \cos \alpha\sqrt{s}\, f(\alpha^2) d\alpha, \qquad (11)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^\infty e^{\alpha\sqrt{s}\sqrt{-1}} f(\alpha^2) d\alpha. \qquad (12)$$

Dans le cas particulier où l'on aurait $n=3$, la formule (11) donnerait :

$$S = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \cos a\alpha \cos b\beta \cos c\gamma \, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

$$= -4\pi \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^\infty \cos \sqrt{s}\,\alpha\, f(\alpha^2) d\alpha, \qquad (13)$$

$$= -4\pi \int_{-\infty}^\infty -\sin \sqrt{s}\,\alpha \cdot \frac{\alpha}{2\sqrt{s}} f(\alpha^2) d\alpha,$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \int_{-\infty}^\infty \alpha f(\alpha^2) \sin (a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} \alpha \, d\alpha. \qquad (14)$$

L'équation (13) peut se mettre sous la forme suivante :

$$S = -4\pi \frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{s}\,\alpha\sqrt{-1}} f(\alpha^2)d\alpha, \qquad (15)$$

$$= -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\alpha\sqrt{-1}} f(\alpha^2)d\alpha. \qquad (16)$$

### Corollaire 1.

Supposons que dans la form. (16), $\alpha, \beta, \gamma$ représentent des coordonnées rectangulaires, et qu'on veuille changer celles-ci en polaires $p, q, r$, on devra recourir aux équations :

$$(\alpha) \qquad \alpha = r\cos p,\ \beta = r\sin p\cos q,\ \gamma = r\sin p\sin q,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2,$$

en substituant aux limites $\alpha = \left\{\begin{matrix}\infty\\ -\infty\end{matrix}\right.$, $\beta = \left\{\begin{matrix}\infty\\ -\infty\end{matrix}\right.$, $\gamma = \left\{\begin{matrix}\infty\\ -\infty\end{matrix}\right.$,

respectivement les limites $p = \left\{\begin{matrix}\pi\\ 0\end{matrix}\right.$, $q = \left\{\begin{matrix}2\pi\\ 0\end{matrix}\right.$, $r = \left\{\begin{matrix}\infty\\ 0\end{matrix}\right.$.

Il faudra de plus déduire des équations $(\alpha)$, les valeurs de $d\alpha, d\beta, d\gamma$, en se conformant aux règles qui ont été données dans le 1er livre pour le changement des variables dans les intégrales multiples. A cet effet différentions les relations :

$(\alpha)$ 1° Par rapport à $\alpha$, alors $\beta, \gamma$ devront être considérés comme constants et l'on aura :

$$d\alpha = dr\cos p - r\sin p dp, \qquad (\beta)$$

$$0 = dr\sin p\cos q + r\cos p\cos q dp - r\sin p\sin q dq, \qquad (\gamma)$$

$$0 = dr\sin p\sin q + r\cos p\sin q dp + r\sin p\cos q dq. \qquad (\delta)$$

Les équations $(\gamma)$ et $(\delta)$ donnent par l'élimination :

$$dq = 0,\ dr = -\frac{r\cos p}{\sin p}dp;$$

en substituant ces valeurs dans $(\beta)$, on obtient :

$$d\alpha = -\frac{rdp}{\sin p}. \qquad (\varepsilon)$$

2° Différentions ensuite par rapport à $\beta$, alors $\gamma$ sera constant et l'on aura :

$$d\beta = dr\sin p\cos q - r\sin p\sin q dq,$$

$$0 = dr\sin p\sin q + r\sin p\cos q dq;$$

la dernière donne $dr = -\frac{r\cos q dq}{\sin q}$; et par suite la première fournit :

$$d\beta = -\frac{r\sin p}{\sin q}dq. \qquad (\eta)$$

3° La troisième différentiation devant s'effectuer par rapport à $\gamma$, $p$ et $q$ seront constants, et l'on aura :

$$d\gamma = dr\sin p\sin q. \qquad (\theta)$$

Les équations $(\varepsilon)$, $(\eta)$, $(\theta)$, donnent par la multiplication :

$$d\alpha d\beta d\gamma = r^2\sin p dp dq dr. \qquad (\zeta)$$

Si nous substituons les valeurs $(\alpha)$ et $(\beta)$ dans l'équation (16), nous obtenons :

$$S = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)e^{(a\alpha+b\beta+c\gamma)\sqrt{-1}}d\alpha d\beta d\gamma,$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^2\mathrm{f}(r^2)e^{r(a\cos p+b\sin p\cos q+c\sin p\sin q)\sqrt{-1}}\sin p\, dp dq dr,$$

$$=-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\alpha\sqrt{-1}}\mathrm{f}(\alpha^2)d\alpha. \qquad (17)$$

Cette formule, pour $b=0$, $c=0$, donnant

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2\mathrm{f}(r^2)e^{ra\cos p\sqrt{-1}}\sin p\, dp\, dr\int_0^{2\pi}dq = -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{\alpha a\sqrt{-1}}\mathrm{f}(\alpha^2)d\alpha,$$

ou :

$$2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2\mathrm{f}(r^2)e^{ra\cos\beta\sqrt{-1}}\sin p dp dr = -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{a}\int_0^{\infty}\alpha e^{a\alpha\sqrt{-1}}\mathrm{f}(\alpha^2)d\alpha,$$

on a aussi :

$$2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2\mathrm{f}(r^2)e^{r(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\cos p\sqrt{-1}}\sin p dp dr$$

$$=-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\alpha\sqrt{-1}}\mathrm{f}(\alpha^2)d\alpha; \qquad (18)$$

par suite l'équation (17) pourra être remplacée par la suivante :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^2 \, \mathrm{f}(r^2)\, e^{r(a\cos p + b\sin p\cos q + c\sin p\sin q)\sqrt{-1}} \sin p\, dp\, dq\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty r^2\, \mathrm{f}(r^2)\, e^{r(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\cos p\sqrt{-1}} \sin p\, dp\, dr. \qquad (19)$$

Si pour abréger on pose $\int_0^\infty r^2\, \mathrm{f}(r^2)\, e^{mr\sqrt{-1}} dr = \mathrm{F}(m)$, (20)

la formule (19) prendra la forme suivante :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(a\cos p + b\sin p\cos q + c\sin p\sin q)\sin p\, dp\, dq$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \mathrm{F}\left[(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\cos p\right]\sin p\, dp. \qquad (21)$$

Cette relation est due à Poisson.

COROLLAIRE 2.

Si dans la form. (16) on pose

$$\alpha = \sqrt{\mathrm{A}}\cdot\alpha', \quad \beta = \sqrt{\mathrm{B}}\cdot\beta', \quad \gamma = \sqrt{\mathrm{C}}\cdot\gamma',$$

$$a = \frac{a'}{\sqrt{\mathrm{A}}}, \quad b = \frac{b'}{\sqrt{\mathrm{B}}}, \quad c = \frac{c'}{\sqrt{\mathrm{C}}};$$

on trouve, en supprimant les accents :

$$\sqrt{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathrm{f}(\mathrm{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\beta^2 + \mathrm{C}\gamma^2)\, e^{(a\alpha+b\beta+c\gamma)\sqrt{-1}} d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

$$= -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\sqrt{\frac{a^2}{\mathrm{A}}+\frac{b^2}{\mathrm{B}}+\frac{c^2}{\mathrm{C}}}} \int_{-\infty}^\infty \alpha\, e^{\left(\frac{a^2}{\mathrm{A}}+\frac{b^2}{\mathrm{B}}+\frac{c^2}{\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\mathrm{A}}\cdot\alpha\sqrt{-1}}\, \mathrm{f}(\mathrm{A}\cdot\alpha^2)\, d\alpha. \qquad (22)$$

On tire de celle-ci, en introduisant les coordonnées polaires, et en ayant égard à la notation (20) :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{F}\left\{\frac{a\cos p + b\sin p\cos q + c\sin p\sin q}{(\mathrm{A}\cos^2 p + \mathrm{B}\sin^2 p\cos^2 q + \mathrm{C}\sin^2 p\sin^2 q)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$\frac{\sin p\, dp\, dq}{(\mathrm{A}\cos^2 p + \mathrm{B}\sin^2 p\cos^2 q + \mathrm{C}\sin^2 p\sin^2 q)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}}} \int_0^\pi \mathrm{F}\left[\left(\frac{a^2}{\mathrm{A}}+\frac{b^2}{\mathrm{B}}+\frac{c^2}{\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{2}}\cos p\right]\sin p\, dp. \qquad (23)$$

Si la fonction $F = 1$, cette formule devient :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin p\, dp\, dq}{(A\cos^2 p + B\sin^2 p\cos^2 q + C\sin^2 p\sin^2 q)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{\sqrt{ABC}}. \qquad (24)$$

COROLLAIRE 3.

L'équation (10), pour $n=2$, donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha^2+\beta^2)\cos a\alpha\cos b\beta\, d\alpha\, d\beta$$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta^2\tau^2 - \frac{a^2+b^2}{4\theta^2}\right) f(\tau^2)\frac{d\theta}{\theta}\tau d\tau,$$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin\left(\theta^2\tau^2 + \frac{a^2+b^2}{4\theta^2}\right) f(\tau^2)\frac{d\theta}{\theta}\tau d\tau.$$

Soient $\theta^2 = \frac{1}{\mu}$, $\tau^2 = \mu v$, $\theta^2\tau^2 = v$, $\theta d\theta = -\frac{d\mu}{2\mu^2}$, $2\tau d\tau = \mu dv$, $\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{d\mu}{\mu^2}$, $\frac{d\theta}{\theta}\tau d\tau = -\frac{d\mu dv}{4}$, la formule précédente deviendra :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha^2+\beta^2)\cos a\alpha\cos b\beta d\alpha d\beta = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin\left(v + \frac{a^2+b^2}{4}\mu\right) f(\mu v) d\mu dv,$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left[\sin v\cos\left(\frac{a^2+b^2}{4}\mu\right) + \cos v\sin\left(\frac{a^2+b^2}{4}\mu\right)\right] f(\mu v) d\mu dv,$$

$$= 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin v\cos\frac{a^2+b^2}{4}\mu\, f(\mu v) d\mu dv. \qquad (25)$$

Ces deux derniers seconds membres sont égaux, puisque chacune des deux intégrales doubles de l'avant-dernier second membre est équivalente à l'intégrale double

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\alpha}{2}\cos\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\beta}{2} f(\alpha\beta)\, d\alpha d\beta.$$

## B. RÉDUCTION DES INTÉGRALES MULTIPLES A LIMITES VARIABLES ASSUJETTIES A UNE ÉQUATION DE CONDITION.

Lorsque les limites des intégrations sont variables, le moyen le plus puissant pour la réduction des intégrales multiples consiste à rendre les limites constantes; car alors l'inversion dans l'ordre des intégrations étant permise, on pourra, par ce moyen, exécuter une ou plusieurs des intégrations indiquées. Or, suivant la méthode de M. Lejeune-Dirichlet, on parvient à rendre les limites des intégrales constantes par l'introduction du facteur de discontinuité P. En effet, soit, comme nous avons vu dans le 1er livre,

$$k > \mathrm{f}(x, y, \ldots) > \lambda, \qquad (\alpha)$$

l'équation de condition à laquelle devront satisfaire les limites variables $x, y, \ldots$ de l'intégrale multiple

$$S = \int_0^x \int_0^y \ldots \varphi(x, y, \ldots) dxdy, \qquad (\beta)$$

il est clair que si l'on trouve un facteur P tel qu'on ait

P=1, pour les valeurs de $x, y, \ldots$ satisfesant à la condition ($\alpha$), et P=0, pour toutes les valeurs de ces mêmes variables situées en-dehors de l'intervalle compris entre $k$ et $\lambda$, on pourra substituer à l'intégrale multiple ($\beta$), la suivante :

$$S = \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \varphi(x, y, \ldots) dxdy \ldots \times P,$$

dont les limites sont constantes.

Ainsi toute la difficulté est réduite à trouver le facteur P jouissant des conditions énoncées.

A cet effet, soit

$$\mathrm{f}(x, y, \ldots) = \sigma, \qquad (\gamma)$$

on aura, par la form. (III), du 3me livre,

$$\mathrm{f}(\sigma) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \sigma u du \int_\lambda^k \mathrm{f}(t) \cos utdt, \quad k < \sigma < \lambda,$$

$$0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \sigma u du \int_\lambda^k \mathrm{f}(t) \cos utdt; \quad k > \lambda > \sigma \text{ ou } \sigma > k > \lambda,$$

d'où il suit que l'expression

$$\frac{2}{\pi\,\mathrm{f}(\sigma)}\int_0^\infty \cos \sigma u du \int_\lambda^k \mathrm{f}(t) \cos utdt$$

sera égale à l'unité, quand on aura $k>\sigma>\lambda$, et sera nulle, pour les valeurs de $x, y$, etc., qui ne satisfont pas à la condition précédente. On a donc, pour le facteur cherché

$$\text{(I).}\quad P=\frac{2}{\pi f(\sigma)}\int_0^\infty \cos\sigma u du\int_\lambda^k f(t)\sin utdt=\begin{cases}1 \text{ si } k>\sigma>\lambda\\ 0 \text{ si } \sigma<\lambda \text{ ou } \sigma>k.\end{cases}$$

Ce facteur général se réduit à une intégrale simple, quand on a

$$\lambda=0,\ k=1,\ f(\sigma)=1,\ \text{par suite } f(t)=1;$$

car alors on a :

$$\int \cos utdt=\frac{\sin ut}{u},\ \int_0^1 \cos utdt=\frac{\sin u}{u},$$

et par conséquent le facteur P prend la forme plus simple

$$\text{(II).}\quad P=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\cos\sigma udu=\begin{cases}1 \text{ pour } \sigma<1,\\ 0 \text{ pour } \sigma>1.\end{cases}$$

Nous allons donner des exemples de Réductions basées sur l'un et l'autre facteur, en commençant par l'emploi du facteur (II).

## I.

## PROBLÈMES POUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES MULTIPLES

### BASÉE SUR L'EMPLOI DU FACTEUR (II).

### 1er Problème.

*Changer l'intégrale multiple*

$$S=\int\int \ldots F(x,y\ldots)dxdy\ldots,$$

*dont les limites des intégrations sont assujetties à l'équation de condition* $\sigma=x+y+\ldots\leqq 1$,

*en une autre dont les limites soient* 0 *et* $\infty$.

*Solution.* Le facteur (II) devient ici :

$$P=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\cos(x+y+\ldots)udu,$$

par conséquent on a :

$$S=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots F(x,y\ldots)dxdy\ldots\times\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\cos(x+y+\ldots)udu. \quad (26)$$

Mais comme on a :

$$\cos(x+y+\ldots)u = \text{à la partie réelle de } e^{u(x+y+\ldots)\sqrt{-1}},$$

on peut écrire aussi :

S = à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots F(x,y\ldots)dxdy\ldots \times \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} e^{u(x+y+\ldots)\sqrt{-1}}du. \qquad (27)$$

## 2me Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S = \int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots e^{-a(x+y+\ldots)}dxdy\ldots,$$
$$\sigma = x+y+\ldots \leqq 1.$$

*Solution.* On a ici $F(x,y,\ldots) = x^{m-1}y^{n-1}\ldots e^{-ax-ay-\ldots}$ ; on a donc, par la form. (27) :

S = à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots e^{-ax-ay-\ldots}dxdy\ldots\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} e^{-u(x+y+\ldots)\sqrt{-1}}du$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du\int_0^\infty x^{m-1}e^{-(a+u\sqrt{-1})x}dx\int_0^\infty y^{n-1}e^{-(a+u\sqrt{-1})y}dy\ldots,$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du \cdot \frac{\Gamma(m)}{(a+u\sqrt{-1})^m}\cdot\frac{\Gamma(n)}{(a+u\sqrt{-1})^n}\ldots,$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi}\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\cdot\frac{(a-u\sqrt{-1})^{m+n+\ldots}}{(a^2+u^2)^{m+n+\ldots}}du. \qquad (\alpha)$$

Soit $m+n+\ldots = t$, on aura :

$$\left(\frac{a-u\sqrt{-1}}{a^2+u^2}\right)^t = \left(\frac{a}{a^2+u^2} - \sqrt{-1}\frac{u}{a^2+u^2}\right)^t = \varsigma^t(\cos t\varphi -$$
$$\sqrt{-1}\sin t\varphi),\ \varsigma = \frac{1}{(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}}},\ \varsigma\cos\varphi = \frac{a}{a^2+u^2},\ \varsigma\sin\varphi = \frac{u}{a^2+u^2},$$

$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a}$ ; donc $(\alpha)$, en rejetant la partie imaginaire, devient :

$$S = \frac{2}{\pi}\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \varsigma^t \cos t\varphi\, du,$$

$$= \frac{2}{\pi}\Gamma(m)\mathrm{L}(n)\ldots\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du \frac{\cos t(\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a})}{(a^2+u^2)^{\frac{t}{2}}}. \tag{28}$$

*Remarque.* L'équation (28) peut se mettre sous une forme plus simple. En effet, dans le cas où l'on suppose que les variables $x, y, \ldots$ se réduisent à une seule, savoir $x \overline{\overline{<}} 1$, la formule précédente donnera :

$$\int_0^1 x^{m-1}e^{-ax}dx = \frac{2\Gamma(m)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, \frac{\cos m(\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a})}{(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}m}} du;$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, \frac{\cos m(\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a})}{(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}m}} du = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^1 x^{m-1}e^{-ax}dx.$$

Donc, en changeant $m$ en $t$, on a :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, \frac{\cos t(\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a})}{(a^2+u^2)^{\frac{1}{2}t}} du = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^1 x^{t-1}e^{-ax}dx;$$

par suite l'équation (28) devient :

$$S = \int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots e^{-a(x+y+\ldots)}dxdy\ldots$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\ldots)}\int_0^1 x^{m+n+\ldots-1}e^{-ax}dx. \tag{28'}$$

### Corollaire.

Pour $a=0$, on a $\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} = \frac{1}{2}\pi$, par suite l'équation (28′) donnera :

$$\int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots dxdy\ldots = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\ldots)}\int_0^1 x^{m+n+\ldots-1}dx,$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{(m+n+\ldots)\,\Gamma(m+n+\ldots)},$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\ldots)}. \qquad (29)$$

## II.

## PROBLÈMES POUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES MULTIPLES BASÉE SUR L'EMPLOI DU FACTEUR (I).

### 1er Problème.

*$\alpha$, $\beta$,... étant des nombres positifs, réduire l'intégrale multiple*

$$S = \int\int \ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots e^{-(\alpha x+\beta y+\ldots)}F(x+y+\ldots)dxdy\ldots,$$

*en supposant que les intégrations se rapportent aux valeurs positives de* x, y,... *qui satisfont à la condition*

$$k \geqq x+y+\ldots \geqq \lambda.$$

*Solution.* Soit $\sigma = x+y+\ldots$, on aura,

$$P = \frac{2}{\pi F(\sigma)}\int_0^\infty \cos\sigma u du \int_\lambda^k F(t)\cos ut dt,$$

$$= \frac{1}{\pi F(\sigma)}\int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma u\sqrt{-1}}du \int_\lambda^k F(t)\cos ut dt;$$

donc :

$$S = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots e^{-(\alpha x+\beta y+\ldots)}dxdy\ldots F(\sigma)\times P,$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots e^{-(\alpha x+\beta y+\ldots)}dxdy\ldots$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma u\sqrt{-1}}du\int_\lambda^k F(t)\cos ut dt,$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_\lambda^k F(t)\,dt\int_{-\infty}^\infty \cos ut du$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots e^{-(\alpha x+\beta y+\ldots)}e^{-(x+y+\ldots)u\sqrt{-1}}dxdy\ldots,$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{k}F(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\cos utdu$$

$$\int_{0}^{\infty}x^{m-1}e^{-(\alpha+u\sqrt{-1})x}dx\int_{0}^{\infty}y^{n-1}e^{-(\beta+u\sqrt{-1})y}dy\ldots,$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{k}F(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\cos utdu\,\frac{\Gamma(m)}{(\alpha+u\sqrt{-1})^{m}}\cdot\frac{\Gamma(n)}{(\beta+u\sqrt{-1})^{m}}\ldots,$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\pi}\int_{\lambda}^{k}F(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos utdu}{(\alpha+u\sqrt{-1})^{m}(\beta+u\sqrt{-1})^{n}\ldots}. \quad (30)$$

### 2^me^ Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S=\int\int\ldots\frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(x+y+\ldots)}{(\theta+\alpha x+\beta y+\ldots)^{m+n+\ldots}}\,dxdy\ldots,$$

*les intégrations se rapportant aux valeurs positives de* x, y,..., *qui satisfont à la condition*

$$k\geqq x+y+\ldots\geqq\lambda.$$

*Solution*. Posons dans la form. (30),

$$\alpha=\alpha'\omega,\ \beta=\beta'\omega,\ \text{etc.},\ u=v\omega,$$

on aura, en omettant les accents, et en remplaçant S par sa valeur :

$$\int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots e^{-(\alpha x+\beta y+\ldots)\omega}F(\sigma)dxdy\ldots$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)..}{\pi}\int_{\lambda}^{k}F(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{(\alpha+v\sqrt{-1})^{m}(\beta+v\sqrt{-1})^{n}\ldots}\cdot\frac{\cos\omega tv}{\omega^{m+n+\ldots-1}}.$$

Multiplions les deux membres par $\omega^{m+n+\ldots-1}e^{-\theta\omega}d\omega$, puis intégrons entre les limites 0 et $\infty$, on aura :

$$\int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(\sigma)dxdy\ldots\int_{0}^{\infty}\omega^{m+n+\ldots-1}e^{-(\theta+\alpha x+\beta y+\ldots)\omega}d\omega=$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)..}{\pi}\int_{\lambda}^{k}F(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{(\alpha+v\sqrt{-1})^{m}(\beta+v\sqrt{-1})^{n}..}\cdot\int_{0}^{\infty}e^{-\theta\omega}d\omega\cos\omega tv\,;$$

ou bien :

$$\iint \ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(\sigma)dxdy\ldots \frac{\Gamma(m+n+\ldots)}{(\theta+\alpha x+\beta y+\ldots)^{m+n+\ldots}} =$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\pi}\int_\lambda^k F(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{(\alpha+v\sqrt{-1})^m(\beta+v\sqrt{-1})^n\ldots}\cdot\frac{\theta}{\theta^2+(vt)^2};$$

d'où :

$$\Gamma(m+n+\ldots)\iint\ldots\frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(\sigma)dxdy\ldots}{(\theta+\alpha x+\beta y+\ldots)^{m+n+\ldots}} =$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\pi}\,\theta\int_\lambda^k F(t)\frac{dt}{t^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{\left(\frac{\theta}{t}\right)^2+v^2}\cdot\frac{1}{(\alpha+v\sqrt{-1})^m(\beta+v\sqrt{-1})^n\ldots}.$$

Mais on a, par la form. (157) du III$^{me}$ livre,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{\left(\frac{\theta}{t}\right)^2+v^2}\cdot\frac{1}{(\alpha+v\sqrt{-1})^m}\cdot\frac{1}{(\beta+v\sqrt{-1})^n}\ldots =$$

$$\frac{\pi t}{\theta}\cdot\frac{1}{\left(\alpha+\frac{\theta}{t}\right)^m}\cdot\frac{1}{\left(\beta+\frac{\theta}{t}\right)^n}\ldots, = \frac{\pi t^{m+n+\ldots}}{\theta(\alpha t+\theta)^m(\beta t+\theta)^n\ldots};$$

par conséquent l'équation précédente devient :

$$\iint\ldots\frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(x+y+\ldots)dxdy\ldots}{(\theta+\alpha x+\beta y+\ldots)^{m+n+\ldots}} =$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\ldots)}\int_\lambda^k F(t)dt\frac{t^{m+n+\ldots-1}}{(\theta+\alpha t)^m(\theta+\beta t)^n\ldots}. \quad (31)$$

### Corollaire 1.

Fesons dans cette dernière formule, $\alpha=\beta=$ etc. $=0$, $\theta=0$, $\lambda=0$, on obtient :

$$\iint\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(x+y+\ldots)dxdy\ldots =$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\ldots)}\int_0^k F(t)\,t^{m+n+\ldots-1}dt. \quad (32)$$

Cette formule particulière est due à M. Liouville (Voy. *Journal de Mathématiques*, t. IV. p. 231).

COROLLAIRE 2.

Si dans la form. (32), on pose $F(x+y+\ldots)=1$, alors en mettant pour $t$ la lettre $k$, on obtient :

$$\int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots dxdy\ldots=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\ldots)}\int_0^k k^{m+n+\ldots-1}dk\,,$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\ldots)}\cdot\frac{k^{m+n+\ldots}}{m+n+\ldots}\,,$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\ldots)}\;k^{m+n+\ldots}. \tag{33}$$

COROLLAIRE 3.

Si dans la form. (33) on fait

$k=1$, $x=(\frac{x'}{a})^p$, $y=(\frac{y'}{b})^q$, etc., on obtient :

$$(\alpha)\quad \int\int\ldots(\frac{x'}{a})^{p(m-1)}(\frac{y'}{b})^{q(n-1)}\ldots p(\frac{x'}{a})^{p-1}\frac{dx'}{a}\cdot q(\frac{y'}{b})^{q-1}\frac{dy'}{b}\ldots$$
$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\ldots)}\;;$$

les intégrations du premier membre sont alors soumises à la condition que les variables $x', y',\ldots$ satisfassent à la relation

$$(\frac{x'}{a})^p+(\frac{y'}{b})^q+\ldots\leqq 1.$$

On peut mettre l'équation ($\alpha$) sous la forme simplifiée :

$$\int\int\ldots x'^{pm-1}y'^{qn-1}\ldots dx'dy'\ldots=\frac{a^{pm}b^{qn}\ldots}{pq}\times\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\ldots)}. \tag{34}$$

$$(\frac{x'}{a})^p+(\frac{y}{b})^q+\ldots\leqq 1.$$

Posons encore $m=\frac{m'}{p}$, $n=\frac{n'}{r}$, etc., on aura, en supprimant tous les accents :

$$\int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots dxdy\ldots=\frac{a^m b^n\ldots\Gamma(\frac{m}{p})\Gamma(\frac{n}{q})\ldots}{pq\ldots\Gamma(1+\frac{m}{p}+\frac{n}{q}+\ldots)}\,, \tag{35}$$

$$(\frac{x}{a})^p+(\frac{y}{b})^q+\ldots\leqq 1.$$

Pour $p=q=\text{etc.}=1$, on a :

$$\int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots dxdy\ldots=\frac{a^m b^n\ldots\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\ldots)},$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\ldots\leqq 1;$$

Cette formule est due à M. Lejeune-Dirichlet.

COROLLAIRE 4.

Soit $m=n=\text{etc.}=1$, et supposons que la form. (35) soit bornée aux 3 variables $x, y, z$; elle deviendra :

$$\int\int\int dxdydz=\frac{abc}{pqr}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{p})\Gamma(\frac{1}{q})\Gamma(\frac{1}{r})}{\Gamma(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})}, \qquad (36)$$

$$(\frac{x}{a})^p+(\frac{y}{b})^q+(\frac{z}{c})^r\leqq 1.$$

Si l'on fait $p=q=r=2$, la form. (36) donnera l'expression du volume de l'ellipsoïde à 3 axes.

3^me^ PROBLÈME.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S=\int\int\ldots\frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(x+y+\ldots)dxdy\ldots}{(\theta+\alpha x+\beta y+\ldots)^\mu}$$

$$k\geqq x+y+\ldots>\lambda.$$

*Solution.* Après avoir posé, pour abréger,

$$\theta+\alpha x+\beta y+\ldots=s,$$

$$m+n+\ldots=c,$$

multiplions les deux membres de l'équation (31) par $\tau^{c-\mu-1}d\tau$, puis intégrons entre les limites $\tau=0$, $\tau=\infty$, on obtiendra :

$$\int\int\ldots\frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(x+y+\ldots)dxdy\ldots}{(\tau+s)^c}\int_0^\infty\tau^{c-\mu-1}d\tau=$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(c)}\int_\lambda^k F(t)dt\,\frac{t^{c-1}}{(\theta+\tau+\alpha t)^m(\theta+\tau+\beta t)^n\ldots}\int_0^\infty\tau^{c-\mu-1}d\tau,$$

ou :

$$\int\int \ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(x+y+\ldots)dxdy\ldots \int_0^\infty \frac{\tau^{c-\mu-1}d\tau}{(\tau+s)^c} =$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(c)}\int_0^\infty \tau^{c-\mu-1}d\tau \int_\lambda^k \frac{t^{c-1}F(t)dt}{(\theta+\tau+\alpha t)^m(\theta+\tau+\beta t)^n\ldots}.$$

Fesons $\tau = st$, on aura :

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{c-\mu-1}d\tau}{(\tau+s)^c} = \int_0^\infty \frac{s^{c-\mu-1}\,t^{c-\mu-1}sdt}{s^c(1+t)^c} = \frac{1}{s^\mu}\int_0^\infty \frac{t^{c-\mu-1}dt}{(1+t)^c} =$$
$$\frac{1}{s^\mu}\cdot\frac{\Gamma(c-\mu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(c)};$$

en substituant cette valeur dans l'expression précédente, on obtient :

$$\int\int \ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(x+y+\ldots)dxdy\ldots \times \frac{1}{s^\mu}\cdot\frac{\Gamma(c-\mu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(c)} =$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(c)}\int_0^\infty \tau^{c-\mu-1}d\tau \int_\lambda^k \frac{t^{c-1}F(t)dt}{(\theta+\tau+\alpha t)^m(\theta+\tau+\beta t)^n\ldots};$$

ou :

$$S = \int\int \ldots \frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots F(x+y+\ldots)dxdy\ldots}{(\theta+\alpha x+\beta y+\ldots)^\mu} =$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(\mu)\Gamma(c-\mu)}\int_0^\infty \tau^{c-\mu-1}d\tau \int_\lambda^k \frac{t^{c-1}F(t)dt}{(\theta+\tau+\alpha t)^m(\theta+\tau+\beta t)^n\ldots}. \quad (37)$$

### 4^me Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S = \int\int \ldots \frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots dxdy\ldots}{(\theta+\alpha x^p+\beta y^q+\ldots)^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}+\ldots}},$$

$$k > \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \ldots > \lambda.$$

*Solution.* Si dans la form. (31), on pose $F(t)=1$,

$x = \left(\frac{x'}{a}\right)^p$, $y = \left(\frac{y'}{b}\right)^q$, etc., $m = \frac{m'}{p}$, $n = \frac{n'}{q}$, etc.,

$\alpha = \alpha' a^p$, $\beta = \beta' b^q$, etc.,

on trouve, en omettant les accents :

$$(38)\quad \iint\cdots \frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots dxdy\ldots}{(\theta+\alpha x^p+\beta y^q+\ldots)^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}+\ldots}} =$$

$$\frac{a^m b^n\ldots}{pq\ldots}\cdot\frac{\Gamma(\frac{m}{p})\Gamma(\frac{n}{q})\ldots}{\Gamma(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}+\ldots)}\int_\lambda^k \frac{t^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}+\ldots-1}dt}{(\theta+\alpha a^p t)^{\frac{m}{p}}(\theta+\beta b^q t)^{\frac{n}{q}}\ldots}.$$

Les intégrations du premier membre se rapportent alors à toutes les valeurs positives de $x, y, \ldots$ qui satisfont à la condition :

$$k>(\frac{x}{a})^p+(\frac{y}{b})^q+\ldots>\lambda.$$

### Corollaire.

Si le premier membre de (38) est supposé contenir les trois variables $x$, $y$, $z$ seulement, de manière qu'il se présente sous la forme

$$\iiint\frac{x^{m-1}y^{n-1}z^{l-1}}{(\theta+\alpha x^p+\beta y^q+\gamma z^r)^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}+\frac{l}{r}}},$$

on aura, pour $m=n=l=1$, $q=q=r=2$, $\alpha=\beta=\gamma=1$, la formule particulière :

$$(39)\quad \iiint\frac{dxdydz}{(\theta+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{abc}{8}\cdot\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\Gamma(\frac{3}{2})}\int_\lambda^k\frac{\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{(\theta+a^2t)(\theta+bt^2)(\theta+ct^2)}}.$$

Fesons ici $t=u^2$ en sorte qu'aux limites $t=\left\{\begin{matrix}k\\ \lambda\end{matrix}\right.$, répondront les limites $u=\left\{\begin{matrix}\sqrt{k}\\ \sqrt{\lambda}\end{matrix}\right.$, l'équation (39) se simplifie, et devient :

$$\iiint\frac{dxdydz}{(\theta+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi}{2}abc\int_{\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{k}}\frac{u^2du}{\sqrt{(\theta^2+a^2u^2)(\theta^2+b^2u^2)(\theta^2+c^2u^2)}};\quad (40)$$

les intégrations du premier membre se rapportent alors à toutes les valeurs positives de $x, y, z$, qui satisfont à la condition :

$$k^2 \geqq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \geqq \lambda^2.$$

5<sup></sup>me PROBLÈME.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S = \int\int \ldots F\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 + \ldots\right] dxdy \ldots$$

$$k > \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 + \ldots > \lambda.$$

*Solution.* Soit $\sigma = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 + \text{etc.}$, on aura :

$$P = \frac{2}{\pi F(\sigma)} \int_0^\infty \cos \sigma u du \int_\lambda^k F(t) \cos utdt ;$$

par conséquent

$$(\alpha). \quad S = \int\int \ldots F(\sigma) dxdy \ldots = \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots F(\sigma) dxdy \times P,$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots dxdy \ldots \int_0^\infty \cos \sigma u du \int_\lambda^k F(t) \cos utdt,$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots dxdy \ldots \int_0^\infty e^{\sigma u \sqrt{-1}} du \int_\lambda^k F(t) \cos utdt,$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi} \int_\lambda^k F(t) dt \int_0^\infty \cos utdu \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots e^{\sigma u \sqrt{-1}} dxdy \ldots,$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi} \int_\lambda^k F(t) dt \int_0^\infty \cos utdu$$

$$\int_0^\infty e^{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2\right] u \sqrt{-1}} dx \int_0^\infty e^{\left[\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2\right] u \sqrt{-1}} dy \ldots$$

Mais on a, par la form. (47) du 1er livre, en général :

$$\int_0^\infty \mathrm{f}(h^2x^2 + \frac{k^2}{x^2})dx = \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{f}(2hk + x^2)dx\ ;$$

donc, pour $h = \frac{1}{a}$, $k = \alpha$, $\mathrm{f}(v) = e^{vu\sqrt{-1}}$, on obtient :

$$\int_0^\infty e^{[(\frac{x}{a})^2 + (\frac{\alpha}{x})^2]u\sqrt{-1}} dx = a\int_0^\infty e^{(\frac{2\alpha}{a} + x^2)u\sqrt{-1}} dx =$$

$$a\, e^{\frac{2\alpha}{a}u\sqrt{-1}} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}} \cdot e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}.$$

$$\int_0^\infty e^{[(\frac{y}{b})^2 + (\frac{\beta}{y})^2]u\sqrt{-1}} dy = b\, e^{\frac{2\beta}{b}u\sqrt{-1}} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}} \cdot e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

etc.

Soit $n$ le nombre des variables $x$, $y$, ...,

$$\varsigma = \frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} + \text{etc.},$$

on aura :

$$\int_0^\infty e^{[(\frac{x}{a})^2 + (\frac{\alpha}{x})^2]u\sqrt{-1}} dx \cdot \int_0^\infty e^{[(\frac{y}{b})^2 + (\frac{\beta}{y})^2]u\sqrt{-1}} dy \ldots =$$

$$\frac{ab\ldots}{2^n}\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{n}{2}} e^{(\frac{n\pi}{4} + \varsigma u)\sqrt{-1}};$$

par conséquent l'expression ($\alpha$) devient :

S = à la partie réelle de

$$\frac{ab\ldots}{2^n}\pi^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2}{\pi}\int_\lambda^k \mathrm{F}(t)dt \int_0^\infty \cos tudu \cdot \frac{1}{u^{\frac{n}{2}}} e^{(\frac{n\pi}{4} + \varsigma u)\sqrt{-1}},$$

$$= \frac{ab\ldots}{2^n} \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2}{\pi}\int_\lambda^k \mathrm{F}(t)dt \int_0^\infty \frac{\cos tu}{u^{\frac{n}{2}}} \cos(\frac{n\pi}{4} + \varsigma u)du. \qquad (\beta)$$

Faisons $\mathrm{T} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos tu}{u^{\frac{n}{2}}} \cos(\frac{n\pi}{4} + \varsigma u)du$,

l'équation ($\beta$) devient :

$$S = \frac{ab\ldots}{2^n} \pi^{\frac{n}{2}} \int_\lambda^k F(t)dtT \,, \qquad (\gamma)$$

et il ne s'agira plus qu'à déterminer T.

A cet effet on a, en développant :

$$T = \frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\pi} \int_0^\infty \frac{2\cos tu \cos \varsigma u}{u^{\frac{n}{2}}} du - \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\pi} \int_0^\infty \frac{2\cos tu \sin\varsigma u}{u^{\frac{n}{2}}} du. \qquad (\delta)$$

Mais on a, pour $t > \varsigma$ :

$$2\cos tu \cos \varsigma u = \cos(t+\varsigma)u + \cos(t-\varsigma)u \,,$$
$$2\cos tu \sin \varsigma u = \sin(t+\varsigma)u - \sin(t-\varsigma)u \,;$$

et, pour $t < \varsigma$, on a :

$$2\cos tu \cos\varsigma u = \cos(\varsigma + t)u + \cos(\varsigma - t)u \,,$$
$$2\cos tu \sin\varsigma u = \sin(\varsigma + t)u + \sin(\varsigma - t)u \,;$$

Donc 1° si $t > \varsigma$, l'équation ($\delta$) donnera :

$$T = \frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\cos(t+\varsigma)udu}{u^{\frac{n}{2}}} + \int_0^\infty \frac{\cos(t-\varsigma)udu}{u^{\frac{n}{2}}} \right] -$$

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\sin(t+\varsigma)udu}{u^{\frac{n}{2}}} - \int_0^\infty \frac{\sin(t-\varsigma)udu}{u^{\frac{n}{2}}} \right].$$

Mais on a, par les form. (78), (79), du IV$^{me}$ livre :

$$\int_0^\infty \frac{\cos rudu}{u^\mu} = \frac{\pi r^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi} \,, \int_0^\infty \frac{\sin rudu}{u^\mu} = \frac{\pi r^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi} \,,$$

donc :

$$T = \frac{(t+\varsigma)^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma(\frac{n}{2})} [1-1] + \frac{(t-\varsigma)^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma(\frac{n}{2})} (1+1) = \frac{(t-\varsigma)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \qquad (\varepsilon)$$

2° Si $t < \varsigma$, on trouvera $T = 0$.

Il y aura maintenant trois cas à distinguer, savoir :

$$\varsigma > k, \quad k > \varsigma > \lambda, \quad \varsigma < \lambda.$$

1$^{er}$ Cas. $\varsigma > k$.

Comme on a $t<k$, on aura, en plus forte raison $t<\varsigma$, donc $T=0$, et par suite, la form. ($\gamma$) donne :

$$S=0.$$

2$^{me}$ Cas. $k>\varsigma>\lambda$.

Pour trouver dans ce cas la valeur de l'intégrale S, de la form. ($\gamma$), il faut décomposer cette intégrale en deux autres l'une prise de $\lambda$ à $\varsigma$, l'autre de $\varsigma$ à $k$, ce qui donne

$$S=\frac{ab\ldots}{2^n}\pi^{\frac{n}{2}}\left[\int_\lambda^\varsigma F(t)dt\cdot T+\int_\varsigma^k F(t)dt\cdot T\right].$$

Dans la première de ces deux intégrales on a $t<\varsigma$, donc $T=0$, par conséquent celle-ci disparaît.

Dans la seconde intégrale on a $t>\varsigma$, donc $T=\dfrac{(t-\varsigma)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$; on a donc :

$$S=\frac{ab\ldots}{2^n}\cdot\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_\varsigma^k F(t)(t-\varsigma)^{\frac{n}{2}-1}dt,\quad k>\varsigma>\lambda. \qquad (41)$$

3$^{me}$ Cas. $\varsigma<\lambda$.

Comme on a $t>\lambda$, on aura en plus forte raison $t>\varsigma$, donc, à cause de ($\varepsilon$), $T=\dfrac{(t-\varsigma)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, par suite :

$$S=\frac{ab\ldots}{2^n}\cdot\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_\lambda^k F(t)(t-\varsigma)^{\frac{n}{2}-1}dt.\quad \varsigma>\lambda.$$

### 6^me Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S=\int\int\ldots e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\ldots)}F(x+y+\ldots)\,dxdy\ldots,$$

*les intégrations devant se rapporter aux valeurs positives et négatives de* x, y..., *qui satisfont à la condition :*

$$k>x+y\ldots>\lambda.$$

*Solution.* Soit $\sigma=x+y+\ldots$, on aura

$$P=\frac{2}{\pi F(\sigma)}\int_0^\infty\cos\sigma u\,du\int_\lambda^k F(t)\cos ut\,dt,$$

$$=\frac{1}{\pi F(\sigma)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma u\sqrt{-1}}du\int_\lambda^k F(t)\cos ut\,dt;$$

on a donc :

$$S=\frac{1}{\pi}\int_\lambda^k F(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\cos ut\,du\ldots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\ldots)}e^{-\sigma u\sqrt{-1}}dxdy\ldots,$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_\lambda^k F(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\cos ut\,du\ldots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2x^2}e^{-ux\sqrt{-1}}dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2y^2}e^{-uy\sqrt{-1}}dy\ldots$$

Mais on a, en général :

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-m^2\tau^2}e^{-u\tau\sqrt{-1}}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-m^2\tau^2}\cos u\tau\,d\tau=\frac{\sqrt{\pi}}{m}e^{-\left(\frac{u}{2m}\right)^2};$$

donc :

$$S=\frac{1}{\pi}\int_\lambda^k F(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\cos ut\,dt\ldots\times\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\left(\frac{u}{2\alpha}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}e^{-\left(\frac{u}{2\beta}\right)^2}\ldots\quad(\alpha)$$

Soit $n$ le nombre des variables, soit pour abréger

$$\varsigma^2=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\ldots,$$

on aura :

$$S = \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\alpha\beta\ldots} \int_{\lambda}^{k} F(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos utdu\, e^{-\frac{1}{4}\varsigma^2 u^2},$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\alpha\beta\ldots} \int_{\lambda}^{k} F(t)dt \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{\varsigma} e^{-(\frac{t}{\varsigma})^2},$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha\beta\ldots} \cdot \frac{1}{\varsigma} \int_{\lambda}^{k} F(t) e^{-(\frac{t}{\varsigma})^2} dt. \qquad (42)$$

### 7^me^ Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$\iint \ldots \frac{F(x+y+\ldots)dxdy\ldots}{(1+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\ldots)^\mu}, \quad k > x+y+\ldots > \lambda.$$

*Solution.* Remplaçons dans l'équation (42), les lettres $\alpha, \beta, .., \varsigma$, respectivement par $\alpha\sqrt{\omega}$, $\beta\sqrt{\omega}, \ldots$, $\frac{\varsigma}{\sqrt{\omega}}$, on aura :

$$\iint \ldots e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\ldots)\omega} F(x+y+\ldots)dxdy =$$

$$\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha\beta\ldots} \cdot \frac{1}{\varsigma} \cdot \frac{\sqrt{\omega}}{(\sqrt{\omega})^n} \int_{\lambda}^{k} F(t) e^{-(\frac{t}{\varsigma})^2\omega} dt.$$

Multiplions les deux membres de celle-ci par $\omega^{\mu-1}e^{-\omega}d\omega$, puis intégrons entre les limites $\omega = 0$, $\omega = \infty$, on obtient :

$$\iint \ldots F(x+y+\ldots)dxdy\ldots \int_0^\infty \omega^{\mu-1} e^{-(1+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\ldots)\omega} d\omega =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha\beta\ldots} \cdot \frac{1}{\varsigma} \cdot \frac{\sqrt{\omega}}{(\sqrt{\omega})^n} \int_{\lambda}^{k} F(t) e^{-(\frac{t}{\varsigma})^2\omega} dt \int_0^\infty \omega^{\mu-1} e^{-\omega} d\omega,$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha\beta\ldots} \frac{1}{\varsigma} \frac{\sqrt{\omega}}{(\sqrt{\omega})^n} \int_{\lambda}^{k} F(t)dt \int_0^\infty e^{-(1+\frac{t^2}{\varsigma^2})\omega} d\omega \cdot \omega^{\mu-1},$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha\beta\ldots} \cdot \frac{1}{\varsigma} \int_\lambda^k \mathrm{F}(t)dt \int_0^\infty e^{-(1+\frac{t^2}{\varsigma^2})\omega} \cdot \omega^{\mu-1+\frac{1}{2}-\frac{n}{2}} d\omega ,$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha\beta\ldots} \frac{1}{\varsigma} \int_\lambda^k \mathrm{F}(t)dt \cdot \frac{\Gamma(\mu - \frac{n-1}{2})}{(1+\frac{t^2}{\varsigma^2})^{\mu-\frac{n-1}{2}}} ;$$

ou, en observant que

$$\int_0^\infty \omega^{\mu-1} e^{-(1+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\ldots)\omega} d\omega = \frac{\Gamma(\mu)}{(1+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\ldots)^\mu} :$$

$$\mathrm{S} = \int\int\ldots \frac{\mathrm{F}(x+y+\ldots)dxdy\ldots}{(1+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\ldots)^\mu} =$$

$$\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \varsigma^{2\mu-n}}{\alpha\beta\ldots} \frac{\Gamma(\mu - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(\mu)} \int_\lambda^k \frac{\mathrm{F}(t)dt}{(\varsigma^2+t^2)^{\mu-\frac{n-1}{2}}} . \quad (43)$$

## 8^me^ Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$\mathrm{S} = \int\int\ldots \frac{\mathrm{F}(x+y+\ldots)dxdy\ldots}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+y^2)\ldots} , \quad k > x+y+\ldots > \lambda.$$

*Solution.* Soit $\sigma = x+y+\ldots$, on aura :

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\mathrm{F}(\sigma)\pi} \int_0^\infty \cos\sigma u du \int_\lambda^k \mathrm{F}(t) \cos ut dt ,$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi \mathrm{F}(\sigma)} \int_0^\infty e^{\sigma u\sqrt{-1}} du \int_\lambda^k \mathrm{F}(t) \cos ut dt ;$$ donc :

S = à la partie réelle de

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \ldots \frac{dxdy\ldots}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+y^2)\ldots} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{\sigma u\sqrt{-1}} du \int_\lambda^k \mathrm{F}(t) \cos tudu ,$$

$$S = \text{à la partie réelle de } \frac{2}{\pi}\int_{\lambda}^{k} F(t)\,dt \int_{0}^{\infty} \cos tu\,du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \frac{e^{\sigma u\sqrt{-1}}\,dx\,dy\ldots}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+y^2)\ldots},$$

$$= \text{à la partie réelle de } \frac{2}{\pi}\int_{\lambda}^{k} F(t)\,dt \int_{0}^{\infty} \cos tu\,du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ux\sqrt{-1}}\,dx}{\alpha^2+x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{uy\sqrt{-1}}\,dy}{\beta^2+y^2}\cdots,$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi}\int_{\lambda}^{k} F(t)\,dt \int_{0}^{\infty} \cos tu\,du \times \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha u} \cdot \frac{\pi}{\beta} e^{-\beta u} \cdots,$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi}\int_{\lambda}^{k} F(t)\,dt \int_{0}^{\infty} \cos tu\,du \times \frac{\pi^{n}}{\alpha\beta\ldots} e^{-(\alpha+\beta+\ldots)u},$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2\pi^{n-1}}{\alpha\beta\ldots}\int_{\lambda}^{k} F(t)\,dt \int_{0}^{\infty} \cos tu\,du\, e^{-(\alpha+\beta+\ldots)u},$$

= à la partie réelle de

$$\frac{2\pi^{n-1}}{\alpha\beta\ldots}\int_{\lambda}^{k} F(t)\,dt \cdot \frac{\varsigma}{\varsigma^2+t^2}.$$

Nous avons fait, pour abréger $\varsigma=\alpha+\beta+\ldots$, et supposé que $n$ exprime le nombre des lettres $\alpha$, $\beta$, etc. Comme le 2$^{d}$ membre de l'expression précédente n'a pas de partie imaginaire, on a définitivement :

$$S = \frac{2\pi^{n-1}\varsigma}{\alpha\beta\ldots}\int_{\lambda}^{\infty} \frac{F(t)\,dt}{\varsigma^2+t^2}. \tag{44}$$

## 9me Problème.

*Réduire l'intégrale multiple*

$$S=\int\int\ldots F(x+y+\ldots)\,dxdy\ldots,$$

$$1>\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\ldots>0.$$

*Solution.* Soient $s=x+y+\ldots$, $\sigma=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\ldots$; on pourra faire

$P=$ à la partie réelle de $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}e^{\sigma\omega\sqrt{-1}}d\omega$,

par là on peut écrire :

$S=$ à la partie réelle de

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots F(s)dxdy\ldots\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}e^{\sigma\omega\sqrt{-1}}d\omega,$$

$=$ à la partie réelle de

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots F(s)\,e^{\sigma\omega\sqrt{-1}}dxdy\ldots$$

Mais on a :

$$F(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{(s-t)u\sqrt{-1}}F(t)dt;$$ donc :

$S=$ à la partie réelle de

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots dxdy\ldots e^{\sigma\omega\sqrt{-1}}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{(s-t)u\sqrt{-1}}F(t)dt,$$

$=$ à la partie réelle de

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt\ldots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tu\sqrt{-1}}du\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{(\sigma\omega+su)\sqrt{-1}}dxdy\ldots,$$

$=$ à la partie réelle de

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt\ldots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tu\sqrt{-1}}du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2\omega+xu\right]\sqrt{-1}}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left[\left(\frac{y}{b}\right)^2\omega+yu\right]\sqrt{-1}}dy\ldots,$$

S = à la partie réelle de

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega \int_{-\infty}^\infty F(t)dt \ldots \int_{-\infty}^\infty e^{-ut\sqrt{-1}}du \times$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\omega}}\,a\,e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}-\frac{a^2u^2}{4\omega}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\omega}}\,b\,e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}-\frac{b^2u^2}{4\omega}} \ldots,$$

= à la partie réelle de

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega \int_{-\infty}^\infty F(t)dt \ldots \int_{-\infty}^\infty e^{-tu\sqrt{-1}}du \times$$

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}ab\ldots}{\omega^{\frac{n}{2}}}\,e^{\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}-\frac{r^2u^2}{4\omega^2}},$$

= à la partie réelle de

$$\pi^{\frac{n-4}{4}}\,e^{\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}}\,ab\ldots\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^{\frac{n}{2}+1}}d\omega \int_{-\infty}^\infty F(t)dt \int_{-\infty}^\infty e^{-[\frac{r^2u^2}{4\omega^2}+tu]\sqrt{-1}}du;$$

on a supposé que $n$ exprime le nombre des lettres $a$, $b$, ..., et l'on fait, pour abréger :

$$r^2 = a^2 + b^2 + \ldots$$

En exécutant l'intégration par rapport à $u$, on a :

S = à la partie réelle de

$$2\pi^{\frac{n-3}{2}}\,e^{\frac{n-1}{4}\pi\sqrt{-1}}\cdot\frac{ab\ldots}{r}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^{\frac{n+1}{2}}}d\omega \int_{-\infty}^\infty F(t)\,e^{\frac{\omega t^2}{r^2}\sqrt{-1}}dt,$$

= à la partie réelle de

$$2\pi^{\frac{n-3}{2}}\,e^{\frac{n-1}{4}\pi\sqrt{-1}}\cdot\frac{ab\ldots}{r}\int_{-\infty}^\infty F(t)dt \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^{\frac{n+1}{2}}}\,e^{\frac{t^2}{r^2}\omega\sqrt{-1}}d\omega.$$

On a donc, en rejetant la partie imaginaire de cette expression :

$$S = \pi^{\frac{n-3}{2}} \cdot \frac{ab\ldots}{r} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^{\frac{n+1}{2}}} \cdot 2\sin\omega\cos\left(\frac{n-1}{4}\pi + \frac{t^2}{r^2}\omega\right). \quad (45)$$

*Remarque.* Ces exemples suffisent pour faire connaître le puissant usage que l'on peut faire de la formule de Fourier dans la réduction des intégrales multiples. Nous renvoyons pour d'autres détails à l'excellent ouvrage de M. Schlömilch, *Analytische studien*, auquel nous avons emprunté la plupart des résultats qui précèdent. Nous terminerons ce livre par la réduction de l'intégrale triple

$$S = -\frac{1}{s-1} \int\int\int \frac{dxdydz}{\left\{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2\right\}^{\frac{1}{2}(s-1)}},$$

donnée par Gauss, et qu'il nomme le potentiel de l'attraction ou de la répulsion exercée par un ellipsoïde sur un point de l'espace, suivant la raison directe des masses, et la puissance $s^e$ réciproque de la distance.

## 10$^{me}$ Problème.

*Réduire l'intégrale triple*

$$S = -\frac{1}{s-1} \int\int\int \frac{dxdydz}{\left\{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2\right\}^{\frac{1}{2}(s-1)}},$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqq 1.$$

*Solution.* Fesons pour abréger

$$r = \left\{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (\alpha)$$

$$\sigma = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2, \quad (\beta)$$

on aura, en introduisant le facteur

$$P = \int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} \cos\sigma\omega\, d\omega,$$

$$S = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{s-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdydz}{r^{s-1}} \int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} \cos\sigma\omega d\omega,$$

S = à la partie réelle de

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdydz}{r^{s-1}}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{\sigma\omega\sqrt{-1}}d\omega\,,$$

= à la partie réelle de

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{s-1}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdydz}{r^{s-1}}e^{\sigma\omega\sqrt{-1}}\,,$$

= à la partie réelle de

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega\times S_1\,; \qquad (\gamma)$$

$$S_1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdydz}{r^{s-1}}e^{\sigma\omega\sqrt{-1}}. \qquad (\delta)$$

Nous allons nous occuper d'abord de la réduction de l'intégrale triple ($\delta$). A cet effet, pour arriver à la séparation des variables, nous introduirons, à la place du facteur $\frac{1}{r^{s-1}}$, son expression en intégrale définie

$$\frac{1}{r^{s-1}}=\frac{e^{\frac{(1-s)}{2}\pi\sqrt{-1}}}{\Gamma(\frac{s-1}{2})}\int_{0}^{\infty}\theta^{\frac{s-3}{2}}e^{r^2\theta\sqrt{-1}}d\theta\,, \qquad 3>s>2\,, \qquad (\varepsilon)$$

déduite de la form. (89) du IV^me livre

$$\int_{0}^{\infty}x^{\mu-1}e^{bx\sqrt{-1}}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{b^{\mu}}e^{\frac{1}{2}\mu\pi\sqrt{-1}}, \qquad 1>\mu>0\,,$$

en posant dans celle-ci :

$$\mu=\frac{s-1}{2},\ b=r^2,\ x=\theta.$$

Par la substitution de ($\varepsilon$) dans ($\delta$) on obtient :

$$S_1=\frac{e^{(\frac{1-s}{4})\pi\sqrt{-1}}}{\Gamma(\frac{s-1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdydz\,e^{\sigma\omega\sqrt{-1}}\int_{0}^{\infty}\theta^{\frac{s-3}{2}}e^{r^2\theta\sqrt{-1}}d\theta$$

$$=\frac{e^{(\frac{1-s}{4})\pi\sqrt{-1}}}{\Gamma(\frac{s-1}{2})}\int_{0}^{\infty}\theta^{\frac{s-3}{2}}d\theta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdydz\,e^{(\sigma\omega+r^2\theta)\sqrt{-1}}. \qquad (\alpha')$$

Mais, en ayant égard aux valeurs ($\alpha$) et ($\beta$), on a :

$$e^{(\sigma\omega+r^2\theta)\sqrt{-1}} =$$

$$e^{[(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^2]\omega\sqrt{-1}+[(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2]\theta\sqrt{-1}},$$

$$= e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\theta\sqrt{-1}} \cdot e^{[(\frac{\omega}{a^2}+\theta)x^2-2\alpha\theta x]\sqrt{-1}}$$

$$\cdot e^{[(\frac{\omega}{b^2}+\theta)y^2-2\beta\theta y]\sqrt{-1}} \cdot e^{[(\frac{\omega}{c^2}+\theta)z^2-2\gamma\theta z]\sqrt{-1}};$$

donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdydz\, e^{(\sigma\omega+r^2\theta)\sqrt{-1}}$$

$$= e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\theta\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{[(\frac{\omega}{a^2}+\theta)x^2-2\alpha\theta x]\sqrt{-1}} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{[(\frac{\omega}{b^2}+\theta)y^2-2\beta\theta y]\sqrt{-1}} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{[(\frac{\omega}{c^2}+\theta)z^2-2\gamma\theta z]\sqrt{-1}}. \quad (\beta')$$

$$= e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\theta\sqrt{-1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\omega}{a^2}+\theta}} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta^2\alpha^2}{\frac{\omega}{a^2}+\theta}\right)\sqrt{-1}} \times$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\omega}{b^2}+\theta}} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta^2\theta^2}{\frac{\omega}{b^2}+\theta}\right)\sqrt{-1}} \times$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\omega}{c^2}+\theta}} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma^2\theta^2}{\frac{\omega}{c^2}+\theta}\right)\sqrt{-1}},$$

(voir la form. (86) du IV$^{me}$ livre),

$$= e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\theta\sqrt{-1}} \cdot \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\frac{\omega}{a^2}+\theta)(\frac{\omega}{b^2}+\theta)(\frac{\omega}{c^2}+\theta)}} \times$$

$$e^{\left\{\frac{3\pi}{4}-\left[\frac{\theta^2\alpha^2a^2}{\omega+a^2\theta^2}+\frac{\theta^2\beta^2b^2}{\omega+b^2\theta}+\frac{\theta^2\gamma^2c^2}{\omega+c^2\theta}\right]\right\}\sqrt{-1}},$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\frac{\omega}{a^2}+\theta)(\frac{\omega}{b^2}+\theta)(\frac{\omega}{c^2}+\theta)}} \times$$

$$e^{\left\{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta^2\alpha^2a^2}{\omega+a^2\theta}-\alpha^2\theta-\frac{\theta^2\beta^2b^2}{\omega+b^2\theta}-\beta^2\theta-\frac{\theta^2\gamma^2c^2}{\omega+c^2\theta}-\gamma^2\theta\right\}\sqrt{-1}},$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\frac{\omega}{a^2}+\theta)(\frac{\omega}{b^2}+\theta)(\frac{\omega}{c^2}+\theta)}} \times$$

$$e^{\left\{\frac{3\pi}{4}+\omega\left[\frac{\alpha^2\theta}{\omega+a^2\theta}+\frac{\beta^2\theta}{\omega+b^2\theta}+\frac{\gamma^2\theta}{\omega+c^2\theta}\right]\right\}\sqrt{-1}},$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\frac{\omega}{a^2}+\theta)(\frac{\omega}{b^2}+\theta)(\frac{\omega}{c^2}+\theta)}} e^{\left\{\frac{3\pi}{4}+\Theta\omega\right\}\sqrt{-1}}, \qquad (\gamma')$$

en fesant pour abréger

$$\Theta = \frac{\alpha^2\theta}{\omega+a^2\theta}+\frac{\beta^2\theta}{\omega+b^2\theta}+\frac{\gamma^2\theta}{\omega+c^2\theta}. \qquad (\delta')$$

En substituant l'expression ($\gamma'$) à la place de son 1[er] membre dans l'équation ($\alpha'$), celle-ci deviendra :

$$S_1 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{s-1}{2})} e^{(1-\frac{s}{4})\pi\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{\theta^{\frac{s-3}{2}} d\theta\, e^{\Theta\omega\sqrt{-1}}}{\sqrt{(\frac{\omega}{a^2}+\theta)(\frac{\omega}{b^2}+\theta)(\frac{\omega}{c^2}+\theta)}}. \qquad (\varepsilon')$$

Mettons l'expression ($\varepsilon'$) à la place de $S_1$ dans l'équation (8), alors celle-ci deviendra :

S = à la partie réelle de

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{s-1}{2}}\cdot\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{s-1}{2})}e^{(1-\frac{s}{4})\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$$

$$\int_0^\infty\frac{\theta^{\frac{s-3}{2}}d\theta\, e^{\Theta\omega\sqrt{-1}}}{\sqrt{(\frac{\omega}{a^2}+\theta)(\frac{\omega}{b^2}+\theta)(\frac{\omega}{c^2}+\theta)}}.$$

Comme on a $\frac{s-1}{2}\Gamma(\frac{s-1}{2})=\Gamma(\frac{s+1}{2})$, $e^{\pi\sqrt{-1}}=-1$, on pourra écrire l'expression précédente de cette manière :

S = à la partie réelle de

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{s\pi}{4}\sqrt{-1}}}{\Gamma(\frac{s+1}{2})}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega\int_0^\infty\frac{\theta^{\frac{s-3}{2}}d\theta\, e^{\Theta\omega\sqrt{-1}}}{\sqrt{(\frac{\omega}{a^2}+\theta)(\frac{\omega}{b^2}+\theta)(\frac{\omega}{c^2}+\theta)}}. \qquad (\alpha'')$$

Il s'agit maintenant de réduire cette intégrale double en une intégrale simple. Pour cela introduisons une nouvelle variable $\tau$, liée à la variable $\theta$, par la relation $\theta=\frac{\omega}{\tau}$.

Aux limites $\theta=\left\{\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix}\right.$ répondront les limites $\tau=\left\{\begin{matrix}0\\\infty\end{matrix}\right.$ ; de plus on aura :

$$d\theta=-\frac{\omega d\tau}{\tau^2},\quad \theta^{\frac{s-3}{2}}d\theta=-\frac{\omega^{\frac{s-1}{2}}d\tau}{\tau^{\frac{s+1}{2}}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega}{a^2}+\theta)(\frac{\omega}{b^2}+\theta)(\frac{\omega}{c^2}+\theta)}}=\frac{1}{\omega^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\tau})(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{\tau})(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{\tau})}},$$

$$=\frac{1}{\omega^{\frac{3}{2}}}\frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+\frac{\tau}{a^2})(1+\frac{\tau}{b^2})(1+\frac{\tau}{c^2})}};$$

$$\Theta = \frac{\alpha^2 \frac{\omega}{\tau}}{\omega + a^2 \frac{\omega}{\tau}} + \frac{\beta^2 \frac{\omega}{\tau}}{\omega + b^2 \frac{\omega}{\tau}} + \frac{\gamma^2 \frac{\omega}{\tau}}{\omega + c^2 \frac{\omega}{\tau}},$$

$$= \frac{\alpha^2}{a^2+\tau} + \frac{\beta^2}{b^2+\tau} + \frac{\gamma^2}{c^2+\tau} = \mathrm{T}. \qquad (\beta'')$$

Nous avons par conséquent, à la place de $(\alpha'')$ :

S = à la partie réelle de

$$\frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{s\pi}{4}\sqrt{-1}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\sin\omega\, d\omega}{\omega} \int_\infty^0 \frac{-\frac{\omega^{\frac{s-1}{2}}}{\tau^{\frac{s+1}{2}}} d\tau\, e^{\mathrm{T}\omega\sqrt{-1}}}{\omega^{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\tau}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{\tau}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{\tau}\right)}},$$

S = à la partie réelle de

$$\frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{s\pi}{4}\sqrt{-1}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_0^\infty \sin\omega\, d\omega \cdot \frac{\omega^{\frac{s-1}{2}}}{\omega^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty \frac{\tau^{\frac{3}{2}-\frac{s+1}{2}} d\tau \cdot e^{\mathrm{T}\omega\sqrt{-1}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\tau}{a^2}\right)\left(1+\frac{\tau}{b^2}\right)\left(1+\frac{\tau}{c^2}\right)}},$$

S = à la partie réelle de

$$\frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{s\pi}{4}\sqrt{-1}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\tau^{1-\frac{s}{2}} d\tau}{\sqrt{\left(1+\frac{\tau}{a^2}\right)\left(1+\frac{\tau}{b^2}\right)\left(1+\frac{\tau}{c^2}\right)}}$$

$$\int_0^\infty \omega^{\frac{5}{2}-3} \sin\omega\, e^{\mathrm{T}\omega\sqrt{-1}} d\omega,$$

S = à la partie réelle de

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\tau^{1-\frac{s}{2}} d\tau}{\sqrt{\left(1+\frac{\tau}{a^2}\right)\left(1+\frac{\tau}{b^2}\right)\left(1+\frac{\tau}{c^2}\right)}} \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda} e^{\left(\mathrm{T}\omega - \frac{s\pi}{4}\right)\sqrt{-1}},$$

On a fait, pour abréger, $\lambda = 3 - \frac{s}{2}$.

Comme on a

$$e^{(\mathrm{T}\omega - \frac{s\pi}{4})\sqrt{-1}} = \cos(\mathrm{T}\omega - \frac{s\pi}{4}) + \sqrt{-1}\sin(\mathrm{T}\omega - \frac{s\pi}{4}),$$

on trouve, en rejetant la partie imaginaire :

$$\mathrm{S} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s+1}{2})}\int_0^\infty \frac{\tau^{1-\frac{s}{2}}d\tau}{\sqrt{(1+\frac{\tau}{a^2})(1+\frac{\tau}{b^2})(1+\frac{\tau}{c^2})}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda}\cos(\mathrm{T}\omega - \frac{s\pi}{4})d\omega. \quad (\gamma'')$$

Cette transformation de $(\alpha'')$ permet d'effectuer la seconde intégration de $(\gamma'')$. En effet, on a :

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda}\cos(\mathrm{T}\omega - \frac{s\pi}{4})d\omega = \cos\frac{s\pi}{4}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\mathrm{T}\omega}{\omega^\lambda}d\omega +$$

$$\sin\frac{s\pi}{4}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda}\sin\mathrm{T}\omega\, d\omega. \quad (\delta'')$$

Or on a, par les form. (78), (79) du 4^me^ livre,

1° *pour* $\mathrm{T} < 1$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda}\cos\mathrm{T}\omega\, d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(1-\mathrm{T})\omega}{\omega^\lambda}d\omega + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(1-\mathrm{T})\omega}{\omega^\lambda}d\omega,$$

$$= \frac{\pi}{4\,\Gamma(\lambda)\sin\frac{1}{2}\lambda\pi}\left\{(1-\mathrm{T})^{\lambda-1} + (1+\mathrm{T})^{\lambda+1}\right\};$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda}\sin\mathrm{T}\omega\, d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(1-\mathrm{T})\omega}{\omega^\lambda}d\omega - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(1+\mathrm{T})\omega}{\omega^\lambda}d\omega,$$

$$= \frac{\pi}{4\,\Gamma(\lambda)\cos\frac{1}{2}\lambda\pi}\left\{(1-\mathrm{T})^{\lambda-1} + (1+\mathrm{T})^{\lambda-1}\right\};$$

2° *pour* $T > 1$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda}\cos T\omega\, d\omega = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(T-1)\omega}{\omega^\lambda}d\omega + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(T+1)\omega}{\omega^\lambda}d\omega,$$

$$= \frac{\pi}{4\,\Gamma(\lambda)\sin\frac{1}{2}\lambda\pi}\left\{-(T-1)^{\lambda-1} + (T+1)^{\lambda-1}\right\};$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda}\sin T\omega\, d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(T-1)\omega}{\omega^\lambda}d\omega - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(T+1)\omega}{\omega^\lambda}d\omega,$$

$$= \frac{\pi}{4\,\Gamma(\lambda)\cos\frac{1}{2}\lambda\pi}\left\{(T-1)^{\lambda-1} - (T+1)^{\lambda-1}\right\}.$$

On a donc, à la place de ($\delta''$), les deux expressions :

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda}\cos\left(T\omega - \frac{s\pi}{4}\right)d\omega = \frac{\pi}{4\Gamma(\lambda)}\left\{\frac{\cos\frac{s\pi}{4}}{\sin\frac{\lambda\pi}{2}} + \frac{\sin\frac{s\pi}{4}}{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}\right\}(1-T)^{\lambda-1}$$

$$+ \frac{\pi}{4\Gamma(\lambda)}\left\{\frac{\cos\frac{s\pi}{4}}{\sin\frac{\lambda\pi}{2}} - \frac{\sin\frac{s\pi}{4}}{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}\right\}(1+T)^{\lambda+1}, \quad T<1,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^\lambda}\cos\left(T\omega - \frac{s\pi}{4}\right)d\omega = \frac{\pi}{4\Gamma(\lambda)}\left\{-\frac{\cos\frac{s\pi}{4}}{\sin\frac{\lambda\pi}{2}} + \frac{\sin\frac{s\pi}{4}}{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}\right\}(T-1)^{\lambda-1}$$

$$+ \frac{\pi}{4\Gamma(\lambda)}\left\{\frac{\cos\frac{s\pi}{4}}{\sin\frac{\lambda\pi}{2}} - \frac{\sin\frac{s\pi}{4}}{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}\right\}(T+1)^{\lambda-1}, \quad T>1.$$

Remettons dans ces formules, pour $\lambda$ sa valeur $3-\frac{s}{2}$, puis développons $\sin\frac{\lambda\pi}{2}$, $\cos\frac{\lambda\pi}{2}$, on trouvera, en réduisant :

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega\, d\omega}{\omega^\lambda}\cos\left(T\omega - \frac{s\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2\,\Gamma(3-\frac{s}{2})}(1-T)^{2-\frac{s}{2}}, \quad T<1,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega\, d\omega}{\omega^\lambda}\cos\left(T\omega - \frac{s\pi}{4}\right) = 0, \quad T>1.$$

Ces deux formules peuvent être réunies en une seule, en écrivant :

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega\, d\omega}{\omega^\lambda} \cos\left(T\omega - \frac{s\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2\Gamma(3-\frac{s}{2})}\,\varphi(T), \qquad (\varepsilon'')$$

pourvu que l'on convienne qu'on doit poser

$$\varphi(T) = (1-T)^{2-\frac{s}{2}}, \text{ quand on a } T<1,$$
$$\text{et } \varphi(T)=0, \text{ quand on a } T>1.$$

Posons aussi, pour abréger

$$\frac{\tau^{1-\frac{s}{2}}}{\sqrt{(1+\frac{\tau}{a^2})(1+\frac{\tau}{b^2})(1+\frac{\tau}{c^2})}} = F(\tau)\ ;$$

on trouvera, à la place de $(\gamma'')$, l'intégrale simple :

$$S = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s+1}{2})}\int_0^\infty F(\tau)d\tau \cdot \frac{-\pi}{2\Gamma(3-\frac{s}{2})}\,\varphi(T),$$

$$= -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(3-\frac{s}{2})}\int_0^\infty F(\tau)d\tau\cdot\varphi(T). \qquad (\alpha''')$$

Cette intégrale aura une valeur différente selon qu'on aura $T<1$ ou $T>1$. Il faut donc encore examiner dans quelles circonstances l'un ou l'autre de ces deux cas a lieu. A cet effet, soit

$$1^\circ \quad \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 < 1\ ; \qquad (\beta''')$$

comme on a posé

$$T = \frac{\alpha^2}{a^2+\tau} + \frac{\beta^2}{b^2+\tau} + \frac{\gamma^2}{c^2+\tau},$$

et que $\tau$ croît depuis zéro jusqu'à l'infini, l'on voit que, sous la condition $(\beta''')$, on aura toujours $T<1$; par suite $\varphi(T) = (1-T)^{2-\frac{s}{2}}$, par suite $(\alpha''')$ devient :

$$S = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(3-\frac{s}{2})}\int_0^\infty F(\tau)d\tau(1-T)^{2-\frac{s}{2}}. \qquad (\gamma''')$$

Soit $\quad 2^{o} \quad (\frac{\alpha}{a})^2 + (\frac{\beta}{b})^2 + (\frac{\gamma}{c})^2 > 1. \qquad (\delta''')$

Si nous désignons par $\tau_1$ la racine réelle positive unique de l'équation

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\tau} + \frac{\beta^2}{b^2+\tau} + \frac{\gamma^2}{c^2+\tau} = 1,$$

on aura $\quad \mathrm{T}>1$ pour $\tau<\tau_1$,

$\quad$ et $\mathrm{T}<1$ pour $\tau>\tau_1$.

Cela posé, comme on a :

$$\int_0^\infty \mathrm{F}(\tau)d\tau\,\varphi(\mathrm{T}) = \int_0^{\tau_1} \mathrm{F}(\tau)d.\,\varphi(\mathrm{T}) + \int_{\tau_1}^\infty \mathrm{F}(\tau)d\tau\,\varphi(\mathrm{T}),$$

il est manifeste que dans la 1re intégrale à droite, où l'on a $\tau<\tau_1$, on aura $\mathrm{T}>1$, donc $\varphi(\mathrm{T})=0$; cette intégrale est donc nulle.

Mais dans la 2me intégrale à droite on a $\tau>\tau_1$, on a donc aussi $\mathrm{T}<1$, donc $\varphi(\mathrm{T})=(1-\mathrm{T})^{2-\frac{s}{2}}$; il vient donc :

$$\int_0^\infty \mathrm{F}(\tau)d\tau\,\varphi(\mathrm{T}) = \int_{\tau_1}^\infty \mathrm{F}(\tau)d\tau\,(1-\mathrm{T})^{2-\frac{s}{2}}, \qquad \text{et par suite :}$$

$$\mathrm{S} = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(3-\frac{s}{2})}\int_{\tau_1}^\infty \mathrm{F}(\tau)d\tau(1-\mathrm{T})^{2-\frac{s}{2}}. \qquad (\varepsilon''')$$

Les deux intégrales $(\gamma''')$ et $(\varepsilon''')$ peuvent être réunies en une seule

$$\mathrm{S} = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(3-\frac{s}{2})}\int_t^\infty \mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,(1-\mathrm{T})^{2-\frac{s}{2}}, \qquad (\alpha^{\mathrm{IV}})$$

en convenant de faire $t=0$ ou $t=\tau_1$, selon que l'on a :

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}<1 \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>1.$$

Remettons dans la form. $(\alpha^{\mathrm{IV}})$ pour $\mathrm{F}(\tau)$ sa valeur

$$\frac{\tau^{1-\frac{s}{2}}}{\sqrt{(1+\frac{\tau}{a^2})(1+\frac{\tau}{b^2})(1+\frac{\tau}{c^2})}},$$

et à la place de S, son expression

$$-\frac{1}{s-1}\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{\left\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma^2)\right\}^{\frac{s-1}{2}}},$$

on aura, à cause de la relation

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)=\frac{s-1}{2}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right),$$

définitivement :

$$(46).\quad \iiint\frac{dxdydz}{\left\{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}\right\}^{s-1}}=$$

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{s}{2}\right)}\int_t^\infty\frac{\tau^{1-\frac{s}{2}}d\tau}{\sqrt{\left(1+\frac{\tau}{a^2}\right)\left(1+\frac{\tau}{b^2}\right)\left(1+\frac{\tau}{c^2}\right)}}(1-\mathrm{T})^{2-\frac{s}{2}},$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2<1;$$

$$\mathrm{T}=\frac{\alpha^2}{a^2+\tau}+\frac{\beta^2}{b^2+\tau}+\frac{\gamma^2}{c^2+\tau^2},$$

$$t=0,\quad \text{pour}\quad \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}<1,$$

$$t=\tau_1,\quad \text{pour}\quad \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>1.$$

$\tau_1$ est la racine positive et réelle unique de l'équation $\mathrm{T}=1$.

FIN DU CINQUIÈME LIVRE.

# VIme LIVRE.

---

# USAGE DES INTÉGRALES DÉFINIES

DANS

## L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

---

Les questions de physique mathématique conduisent presque toujours à des équations linéaires aux différences partielles et à coëfficients constants, qu'il s'agit d'intégrer pour obtenir la loi cherchée des phénomènes. Dans ce livre nous donnerons un résumé des méthodes d'intégration les plus usuelles de ces équations, fondées sur les intégrales doubles et multiples de Fourier, et la transformation en séries d'exponentielles. Ce livre se partage donc naturellement en deux sections; dont la 1re s'occupera de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles fondée sur les propriétés des intégrales de Fourier, et dont la seconde traitera de la manière d'intégrer ces mêmes équations par des séries d'exponentielles.

## 1re SECTION.

### INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

PAR L'EMPLOI DES FORMULES DE FOURIER.

Nous exposerons dans cette section d'abord la Méthode telle qu'elle a été donnée et pratiquée par Fourier, puis la généralisation de cette méthode due à M. Cauchy.

## (a) MÉTHODE DE FOURIER.

(Voir la *Théorie de la Chaleur*, pag. 523-541.)

La méthode de Fourier consiste : 1° à chercher une intégrale particulière de l'équation proposée ; 2° à chercher la somme d'une infinité de ces intégrales, mise sous la forme d'une intégrale double ou multiple contenant une fonction arbitraire ; 3° à déterminer cette fonction arbitraire au moyen de la valeur initiale de l'intégrale cherchée et de ses dérivées, et des propriétés connues des intégrales de Fourier ; 4° à démontrer *à posteriori* que l'intégrale trouvée est l'intégrale complète, et la plus générale de la proposée, en fesant voir : 1° qu'elle satisfait à l'équation donnée, 2° qu'elle reproduit les fonctions données désignant l'état initial de l'inconnue et de ses dérivées.

Les exemples suivants éclairciront la marche de cette méthode.

### 1er Exemple.

*Chercher l'inconnue* $u = f(x, t)$, *étant donnée l'équation aux différences partielles*

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \qquad (1$$

*de la fonction, tout-à-fait arbitraire,*

$$u = \varphi(x), \qquad (2$$

*répondant à l'état initial* $t = 0$.

*Solution.* Pour $k = a^2\alpha^2$, on trouve que l'équation (1 est satisfaite, en fesant

$$u = e^{-kt}\cos(\alpha x). \qquad (3$$

Donc si $\mu$ désigne une constante arbitraire ne contenant aucune des quantités $x$, $t$, l'expression

$$d\mu\, F(\mu)\, e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(\mu - x)\, d\alpha, \qquad (4$$

qui ne diffère de (3 que par des facteurs constants, satisfera également à la proposée (1). Il suit de là que l'intégrale double

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\, e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(\mu - x)\, d\mu\, d\alpha, \qquad (5$$

qui n'est qu'une somme d'une infinité d'intégrales particulières égales à l'expression (4, satisfait aussi à l'équation (1.

Mais pour $t=0$, nous devons avoir $u=\varphi(x)$; donc, pour cette valeur de $t$ l'équation (5 devient :

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(\mu)\cos\alpha(\mu-x)d\mu\,d\alpha \qquad (6$$

Mais on a, par la form. (107) du III$^{me}$ liv.,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mu)\cos\alpha(\mu-x)d\mu\,d\alpha\,; \qquad (7$$

donc, $\quad \mathrm{F}(\mu)=\dfrac{1}{2\pi}\varphi(\mu).$

En substituant cette valeur dans (5, on obtient, pour l'inconnue cherchée :

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mu)e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(\mu-x)\,d\mu\,d\alpha. \qquad (8$$

Je dis que (8 est l'intégrale complète de l'équation proposée; en effet, 1° cette expression satisfait à l'équation (1, et 2° elle donne $u=\varphi(x)$, pour $t=0$.

Corollaire.

En effectuant l'intégration par rapport à $\alpha$, on peut donner à l'expression (8 une forme plus simple; en effet, comme on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos 2h\,\alpha\, e^{-k^2\alpha^2}d\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{k}e^{-(\frac{h}{k})},$$

en posant $\dfrac{(\mu-x)^2}{4a^2t}=\nu^2$, $\mu=x+2a\nu\sqrt{t}$, $d\mu=2a\sqrt{t}\,d\nu$, on obtient :

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mu)e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(\mu-x)\,d\mu\,d\alpha,$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mu)\,d\mu\int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha(\mu-x)e^{-a^2\alpha^2 t}d\alpha.$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mu)d\mu\, e^{-\frac{(\mu-x)^2}{4a^2t}},$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\nu^2}\varphi(x+2a\nu\sqrt{t})\,d\nu.$$

### 2<sup></sup>

2me Exemple.

*Chercher* u = f(x, t), *étant donné*

$$\frac{du}{dt} = a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{d^4u}{dx^4} + \text{etc.}, \qquad (1$$

$$u = \varphi(x), \ \textit{pour} \ t = 0.$$

*Solution.* Si l'on pose $k = a\alpha^2 - b\alpha^4 + \text{etc.}$, on trouve que la proposée (1 est satisfaite par la valeur particulière

$$u = e^{-kt}\cos(\alpha x).$$

Elle sera donc aussi satisfaite pour

$$u = e^{-kt}\cos\alpha(\mu - x),$$

et par suite pour

$$F(\mu)\, e^{-(a\alpha^2 - b\alpha^4 + \ldots)t}\cos\alpha(\mu - x)\, d\mu\, d\alpha\,;$$

donc aussi pour

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\, e^{-(a\alpha^2 - b\alpha^4 + \ldots)t}\cos\alpha(\mu - x)\, d\mu\, d\alpha. \qquad (2$$

Pour $t = 0$, on doit avoir $u = \varphi(x)$, donc

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\cos\alpha(\mu - x)\, d\mu\, d\alpha\,; \qquad (3$$

Mais on a, par la form. (107) liv. III,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu)\cos\alpha(\mu - x)\, d\mu\, d\alpha\,; \qquad (4$$

donc, à cause de (3 et de (4,

$$F(\mu) = \frac{1}{2\pi}\varphi(\mu)\,;$$

donc (2 devient :

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu)\, e^{-(a\alpha^2 - b\alpha^4 + \ldots)t}\cos\alpha(\mu - x)\, d\mu\, d\alpha\,; \qquad (5$$

C'est l'intégrale complète de l'équation proposée. Car,
1° L'expression (5 satisfait à l'équation (1,
2° Elle donne $u = \varphi(x)$ pour $t = 0$.

### 3$^{me}$ Exemple.

*Chercher* u = f(x, t) *étant donné*

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^4u}{dx^4} = 0, \qquad (1$$

$$u = \varphi(x) \textit{ pour } t = 0; \quad \frac{du}{dt} = \psi(x) \textit{ pour } t = 0.$$

*Solution.* En posant

$$u = \cos(\alpha^2 t)\cos\alpha(\mu - x), \qquad (2$$

on trouve

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\alpha^4 \cos(\alpha^2 t)\cos\alpha(\mu - x),$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \alpha^4 \cos(\alpha^2 t)\cos\alpha(\mu - x),$$

donc l'expression (2 satisfait à la proposée ; il en sera de même de l'expression

$$F(\mu)\cos(\alpha^2 t)\cos\alpha(\mu - x)d\mu\, d\alpha,$$

et par suite de la suivante :

$$U = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\cos(\alpha^2 t)\cos\alpha(\mu - x)d\mu\, d\alpha; \qquad \text{ou de}$$

$$U = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu)\cos(\alpha^2 t)\cos\alpha(\mu - x)d\mu\, d\alpha. \qquad (3$$

Cette intégrale, quoique propre à satisfaire à la proposée (1, et donnant $\varphi(x)$ pour $t = 0$, n'est pas l'intégrale complète, elle n'en constitue qu'une partie, attendu que $\frac{dU}{dt}$, contenant $\sin(\alpha^2 t)$, s'évanouit avec $t$, et ne produit pas la fonction initiale $\psi(x)$.

Pour chercher l'autre partie V de l'intégrale complète, changeons dans (3, $\varphi$ en $\psi$, puis après avoir multiplié par $dt$, et intégré par rapport à $t$, on trouvera :

$$V = \int U dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\,\psi(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \cos\alpha(\mu - x)\int\cos(\alpha^2 t)dt,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\,\psi(\mu)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2}\sin(\alpha^2 t)\cos\alpha(\mu - x)d\alpha. \qquad (4$$

Cette expression de (4 satisfera encore à la proposée, et l'on trouvera de plus,

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\psi(\mu)\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\cos(\alpha^2t)\cos\alpha(\mu-x)\,,$$
$$=\psi(x)\ \text{pour}\ t=0.$$

On a donc, pour l'intégrale complète :

$$u=U+V. \qquad (5$$

En effet, 1° U et V satisfesant séparément à (1, il en sera de même de leur somme $u$.

2° Pour $t=0$, (5 donne $u=U$, et par suite $u=\varphi(x)$.

3° En différentiant (5 on obtient :

$$\frac{du}{dt}=\frac{dU}{dt}+\frac{dV}{dt}.$$

Or pour $t=0$, on a $\frac{dU}{dt}=0$, $\frac{dV}{dt}=\psi(x)$,

donc $\qquad \frac{du}{dt}=\psi(x).$

Corollaire.

On peut réduire l'expression (3 à une forme plus simple, en fesant usage de la formule (58) du IIme livre, mise sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\cos(\alpha^2t)\cos(\alpha z)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z^2}{4t}\right),$$

et en posant $\frac{\mu-x}{2\sqrt{t}}=\nu$; car alors on trouve :

$$U=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\varphi(\mu)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\alpha^2t)\cos\alpha(\mu-x)\,d\alpha\,,$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\varphi(\mu)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(\mu-x)^2}{4t}\right),$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\varphi(\mu)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(\mu-x)^2}{4t}\right),$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\sqrt{t}\,\varphi\,(x+2\nu\sqrt{t})\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,[\sin(\nu^2)+\cos(\nu^2)]\,,$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\,[\sin(\nu^2)+\cos(\nu^2)]\,\varphi(x+2\nu\sqrt{t}).$$

### 4[me] Exemple.

*Chercher* $u = f(x, y, t)$ *étant donné*

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}, \qquad (1$$

$$u = \varphi(x,y) \text{ pour } t = 0, \quad \frac{du}{dt} = \psi(x,y) \text{ pour } t = 0.$$

*Solution.* En posant $k = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}$, on trouve que l'équation (1 est satisfaite par

$$u = \cos(kt)\cos(\alpha x)\cos(\beta y);$$

elle le sera donc aussi par les expressions

$$\cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)\cos(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}t,$$

$$F(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)\cos(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}t\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu, \qquad (2$$

et par suite par

$$(3, \quad U = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)\cos(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}t\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu,$$

somme d'une infinité d'intégrales particulières égales à (2.

Pour $t = 0$, cette expression devient

$$\varphi(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu,$$

et comme on a aussi, par la form. (120′) du III[me] liv.,

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu,$$

on déduit de ces deux équations

$$F(\mu,\nu) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \varphi(\mu,\nu);$$

donc (3 devient :

$$(4, \quad U = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \varphi(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)\cos(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}t\, d\mu\, d\beta\, d\mu\, d\nu;$$

C'est la 1[re] partie de l'intégrale cherchée. Pour obtenir la 2[de], il faut, comme dans l'exemple précédent, après avoir changé $\varphi$ en $\psi$,

et multiplié par $dt$, intégrer (4, par rapport à $t$, et poser

$$(5, \quad V = \int U dt = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu,\nu) \cos\alpha(\mu - x) \times$$

$$\cos\beta(\nu - y) \cdot \frac{\sin(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu\,;$$

l'intégrale complète sera

$$u = U + V. \qquad (6$$

En effet, 1° U et V satisfont à (1, donc leur somme $u$ satisfait à la proposée. 2° pour $t=0$, on a $V=0$, $U=\varphi(x,y)$, donc $u=\varphi(x,y)$. 3° pour $t=0$, on a $\frac{dU}{dt}=0$, $\frac{dV}{dt}=\psi(x,y)$; donc pour $t=0$, on a :

$$\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} = \psi(x,y).$$

### 5me Exemple.

*Chercher* u = f(x,y,z,t) *étant donné*

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \qquad (1$$

$$u = \varphi(x,y,z) \textit{ pour } t=0\,, \quad \frac{du}{dt} = \psi(x,y,z) \textit{ pour } t=0.$$

*Solution.* Une intégrale particulière de la proposée est :

$$u = \cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)\cos\gamma(\varsigma - z)\cos(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}} t\,;$$

donc

$$u = F(\mu,\nu,\varsigma)\cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)\cos\gamma(\varsigma - z)\cos(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}} t \; d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\mu\, d\nu\, d\varsigma\,,$$

satisfait aussi à l'équation (1, et par suite aussi la somme

$$U = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,\nu,\varsigma)\cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)$$

$$\cos\gamma(\varsigma - z)\cos(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}} t \, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\mu\, d\nu\, d\varsigma.$$

En raisonnant comme dans l'exemple précédent, et en ayant égard à la form. (121′) du IIme liv., on trouve, pour la 1re partie

de l'intégrale cherchée :

$$U = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu,\nu,\varsigma)\cos\alpha(\mu-x)\cos\beta(\nu-y)$$
$$\times \cos\gamma(\varsigma-z)\cos(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}t\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\mu\,d\nu\,d\varsigma.$$

En changeant $\varphi$ en $\psi$, on a, pour la 2[de] partie de la même intégrale :

$$V = \int U dt = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu,\nu,\varsigma)\cos\alpha(\mu-x)\times$$
$$\cos\beta(\nu-y)\cos\gamma(\varsigma-z)\frac{\sin(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\mu\,d\nu\,d\varsigma\,;$$

en sorte que l'intégrale complète sera

$$u = U + V.$$

### 6[me] Exemple.

*Chercher* u = f(x, y, z) *étant donné*

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \qquad (1$$

$$u = \varphi(x,y) \textit{ pour } z = 0, \quad \frac{du}{dz} = \psi(x,y) \textit{ pour } z = 0.$$

*Solution.* En posant $m = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, l'équation proposée sera satisfaite par

$$u = \cos\alpha x\cos\beta y\, e^{mz},$$

par conséquent

$$u = \cos\alpha(\mu-x)\cos\beta(\nu-y)\left[e^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right],$$

est une intégrale particulière de l'équation (1. Cette équation sera donc aussi satisfaite par

$$F(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu-x)\cos\beta(\nu-y)\left[e^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]d\alpha d\beta d\mu d\nu,$$

et par suite, par la somme

$$U = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu-x)\cos\beta(\nu-y)\left[e^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right.$$
$$\left.+ e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]d\alpha\,d\beta\,d\mu\,d\nu.$$

Donc la 1[re] partie de l'intégrale cherchée sera :

$$U = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu-x)\cos\beta(\nu-y)\left[e^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right] d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu\,;$$

et on trouvera pour la 2[de] partie

$$V = \int U dt = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu-x)\cos\beta(\nu-y) \times \frac{e^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu\,;$$

par conséquent l'intégrale complète sera

$$u = U + V.$$

### 7[me] Exemple.

*Chercher* $u = f(x, y, t)$ *étant donné*

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^4u}{dx^4} + \frac{d^4u}{dx^2dy^2} + \frac{d^4u}{dy^4} = 0, \quad (1$$

$$u = \varphi(x,y) \text{ pour } t=0, \quad \frac{du}{dt} = \psi(x,y) \text{ pour } t=0.$$

*Solution.* Pour $k = \alpha^2 + \beta^2$, on trouve que

$$u = \cos(\alpha x)\cos(\beta y)\cos(kt)$$

satisfait à (1 ; on peut donc prendre pour une intégrale particulière de (1, l'expression

$$u = \cos\alpha(\mu - x)\cos\beta(\nu - y)\cos(\alpha^2 + \beta^2)t.$$

En raisonnant, comme dans les exemples précédents, on trouve pour les deux parties de l'intégrale cherchée :

$$U = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu-x)\cos\beta(\nu-y)\cos(\alpha^2+\beta^2)t\; d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu,$$

$$V = \int U dt = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu,\nu)\cos\alpha(\mu-x)\cos\beta(\nu-y) \times \frac{\sin(\alpha^2+\beta^2)t}{\alpha^2+\beta^2}\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu\,;$$

par conséquent l'intégrale complète est

$$u = U + V.$$

## (*b*) MÉTHODE DE CAUCHY.

(Voir le *Journal de l'Ecole polytechnique*, 19 cah., p. 545-570).

En pratiquant la méthode précédente on doit chercher par tâtonnements, ou guidé par des propriétés puisées dans la nature de la question, une intégrale particulière, c'est-à-dire une expression qui satisfasse à la proposée. La méthode de Cauchy, quoique basée sur celle de Fourier, n'exige pas cette donnée préliminaire, et les préceptes dont elle se compose impliquent la détermination de cette donnée elle-même. Pour rendre l'intelligence de cette méthode plus sensible, nous commencerons par des cas particuliers en réservant pour la fin, l'exposition générale du procédé.

### 1er Exemple.

*Chercher* $u = f(x, y, t)$ *étant donné*

$$\frac{d^2u}{dt^2} + b^2\left(\frac{d^4u}{dx^4} + 2\frac{d^4u}{dx^2dy^2} + \frac{d^4u}{dy^4}\right) = 0, \quad (1$$

$$u = \varphi(x, y) \textit{ pour } t = 0, \quad \frac{du}{dt} = \psi(x, y) \textit{ pour } t = 0.$$

*Solution.* Soit $T_0$ une fonction de $t$, telle que l'on ait $T_0 = 1$, $\frac{dT_0}{dt} = 0$, pour $t = 0$, et supposons de plus que

$$u = T_0 e^{\alpha x\sqrt{-1}} e^{\beta y\sqrt{-1}}$$

satisfasse à la proposée (1, et que l'on ait par conséquent

$$\frac{d^2T_0}{dt^2} + b^2[\alpha^2 + \beta^2]^2 T_0 = 0.$$

Cela posé, il est clair que les expressions

$$T_0 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}},$$

$$F(\mu,\nu) T_0 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} d\mu\, d\nu\, d\alpha\, d\beta,$$

$$U = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k} F(\mu,\nu) T_0 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu, \quad (3$$

satisferont également à l'équation (1.

Les limites relatives à $\alpha$ et $\beta$, dans cette dernière expression, sont $-\infty$ et $+\infty$; celles qui se rapportent à $\mu$ et à $\nu$ sont des valeurs quelconques $\delta$, $\varepsilon$; $\eta$, $k$; pourvu que ces nombres comprennent les variables $\mu$ et $\nu$.

Pour $t=0$, on doit avoir $u=\varphi(x,y)$, par conséquent pour cette valeur de $t$, l'expression (3 devient :

$$\varphi(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\mathrm{F}(\mu,\nu)\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,d\alpha d\beta d\mu d\nu\,;$$

et comme on a aussi, form. (120), liv. III,

$$\varphi(x,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\varphi(\mu,\nu)\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,d\alpha\,d\beta\,d\mu\,d\nu\,,$$

il suit de ces deux relations

$$\mathrm{F}(\mu,\nu)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\varphi(\mu,\nu).$$

Par conséquent (3 devient :

$$\mathrm{U}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\varphi(\mu,\iota)\,\mathrm{T}_0\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,d\alpha\,d\beta\,d\mu\,d\nu. \quad (4$$

On tire de cette formule, qui est la 1re partie de l'intégrale complète,

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt}=0,\ \text{à cause de}\ \frac{d\mathrm{T}_0}{dt}=0. \quad (5$$

Pour avoir la 2de partie de l'intégrale cherchée, supposons que $\mathrm{T}_1$ soit une fonction de $t$, telle que l'on ait $\mathrm{T}_1=0$, pour $t=0$, $\dfrac{d\mathrm{T}_1}{dt}=1$, pour $t=0$, et que

$$u=\mathrm{T}_1\,e^{\alpha x\sqrt{-1}}\,e^{\beta y\sqrt{-1}}$$

satisfasse à la proposée ; ce qui exige que l'on ait

$$\frac{d^2\mathrm{T}_1}{dt^2}+b^2[\alpha^2+\beta^2]^2\mathrm{T}_1=0. \quad (6$$

alors, je dis que la 2de partie demandée sera

$$\mathrm{V}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\psi(\mu,\nu)\,\mathrm{T}_1\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,d\alpha\,d\beta\,d\mu\,d\nu\,, \quad (7$$

et que l'on aura pour l'intégrale complète

$$u=\mathrm{U}+\mathrm{V}. \quad (8$$

En effet, 1° U et V satisfont séparément à (1, donc leur somme $u$ y satisfera aussi ;

2° Pour $t=0$, on a $T_1=0$, donc $V=0$, donc

$$u=U=\varphi(x,y)\ ;$$

3° On a : $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{dU}{dt}+\dfrac{dV}{dt}$ ;

or pour $t=0$, il vient $\dfrac{dU}{dt}=0$, donc $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{dV}{dt}$ ;

et comme $\dfrac{dT_1}{dt}=1$, on a $\dfrac{du}{dt}=\psi(x,y)$.

En mettant pour U et V leurs valeurs, l'on voit que l'intégrale complète

$$u=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\varphi(\mu,\nu)\,T_0\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,d\alpha\,d\beta\,d\mu\,d\nu\ +$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\psi(\mu,\nu)\,T_1\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\,e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,d\alpha\,d\beta\,d\mu\,d\nu, \quad (9$$

serait déterminée, si l'on connaissait les fonctions $T_0$, $T_1$, données par les propriétés :

$$\left.\begin{aligned} T_0=1\ ,\quad \frac{dT_0}{dt}=0\ ,\\ T_1=0\ ,\quad \frac{dT_1}{dt}=1\ ;\end{aligned}\right\}\ \text{pour } t=0\ , \qquad (10$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2T_0}{dt^2}+b^2(\alpha^2+\beta^2)^2T_0=0\ ,\\ \frac{d^2T_1}{dt^2}+b^2(\alpha^2+\beta^2)^2T_1=0.\end{aligned}\right\} \qquad (11$$

Pour déterminer $T_0$, $T_1$, observons que, $s$ désignant une fonction de $t$ et de $v$, si on avait la relation

$$s=T_0+T_1v\ , \qquad (12$$

les conditions (10 seraient remplies, pourvu que $s$ jouisse de la propriété de se réduire à 1 pour $t=0$, et que l'on eût pour la même valeur de $t$, $\dfrac{ds}{dt}=v$. On obtiendrait en même temps, à la place des deux équations (11, l'équation unique

$$\frac{d^2s}{dt^2}+b^2(\alpha^2+\beta^2)s=0. \qquad (12$$

Cela posé, comme on doit avoir $s=1$, $\frac{ds}{dt}=v$, pour $t=0$, les intégrales particulières de l'équation (12 seront de la forme

$$s=e^{vt}, \text{ d'où } \frac{ds}{dt}=v\,e^{vt},$$

et par suite, en substituant, (12 donne :

$$v^2+b^2(\alpha^2+\beta^2)^2=0\,; \qquad (13$$

d'où l'on tire :

$$v_0=b\sqrt{-1}\,(\alpha^2+\beta^2)\,,\quad v_1=-b\sqrt{-1}\,(\alpha^2+\beta^2). \qquad (14$$

Par conséquent les deux intégrales particulières de (12 sont

$$s=e^{v_0 t}\,,\quad s=e^{v_1 t}\,;$$

donc, à cause des conditions de $s=1$, $\frac{ds}{dt}=v$, pour $t=0$, l'intégrale générale sera

$$s=[v^2+b^2(\alpha^2+\beta^2)^2]\left\{\frac{e^{v_0 t}}{2v_0(v-v_0)}+\frac{e^{v_1 t}}{2v_1(v-v_1)}\right\}; \qquad (15$$

ou, à cause de

$$\frac{1}{v-v_0}=-\frac{1}{v_0\left(1-\frac{v}{v_0}\right)}=-\frac{1}{v_0}-\frac{v}{v_0^{\,2}}-\text{etc.},$$

$$\frac{1}{v-v_1}=-\frac{1}{v_1}-\frac{v}{v_1^{\,2}}-\text{etc.},$$

$$s=-b^2(\alpha^2+\beta^2)^2\left[\frac{e^{v_0 t}}{2v_0^{\,2}}+\frac{e^{v_1 t}}{2v_1^{\,2}}\right]-$$

$$b^2(\alpha^2+\beta^2)^2\left[\frac{e^{v_0 t}}{2v_0^{\,3}}+\frac{e^{v_1 t}}{2v_1^{\,3}}\right]v+\text{etc.} \qquad (16$$

Il est facile de se convaincre *à posteriori* que la valeur (15 ou (16 de $s$ se réduit à 1 pour $t=0$, et que l'on a $\frac{ds}{dt}=v$, pour $t=0$. Donc, en comparant les équations (16 et (12, on en conclut :

$$T_0=-b^2(\alpha^2+\beta^2)^2\left\{\frac{e^{v_0 t}}{2v_0^{\,2}}+\frac{e^{v_1 t}}{2v_1^{\,2}}\right\},$$

$$T_1=-b^2(\alpha^2+\beta^2)^2\left\{\frac{e^{v_0 t}}{2v_0^{\,3}}+\frac{e^{v_1 t}}{2v_1^{\,3}}\right\}. \qquad (17$$

Soit, pour abréger, $A_0 = - b^2(\alpha^2 + \beta^2)^2$,

$$R = \frac{e^{v_0 t}}{2v_0^{\,3}} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1^{\,3}},$$

donc $$\frac{dR}{dt} = \frac{e^{v_0 t}}{2v_0^{\,2}} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1^{\,2}},$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{e^{v_0 t}}{2v_0} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1},$$

$$\frac{d^3R}{dt^3} = \frac{e^{v_0 t} + e^{v_1 t}}{2}, \qquad (18$$

on aura :

$$T_0 = A_0 \frac{dR}{dt}, \quad T_1 = A_0 R. \qquad (19$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (9, on obtient, pour l'expression de l'intégrale complète,

$$u = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_\delta^\varepsilon \int_\eta^k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \frac{dR}{dt} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} \times \varphi(\mu,\nu)\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu +$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_\delta^\varepsilon \int_\eta^k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0 R e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} \psi(\mu,\nu)\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu,$$

$$= \int_\delta^\varepsilon \int_\eta^x \varphi(\mu,\nu) d\mu d\nu \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \frac{dR}{dt} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} \times d\alpha\, d\beta +$$

$$\int_0^t dt \int_\delta^\varepsilon \int_\eta^k \psi(\mu,\nu)\, d\mu d\nu \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \frac{dR}{dt} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} \times e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} d\alpha d\beta. \qquad (20$$

Cette expression peut être simplifiée en posant :

$$Q = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} d\alpha\, d\beta; \qquad (21$$

d'où :

$$A_0 \frac{dQ}{dt} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \frac{dR}{dt} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} d\alpha d\beta;$$

on a donc :

$$u=\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\varphi(\mu,\nu)\,d\mu d\nu\cdot A_0\frac{dQ}{dt}+\int_0^t dt\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\psi(\mu,\nu)d\mu d\nu\cdot A_0\frac{dR}{dt}. \quad (22$$

Mais à l'aide de l'équation (21 on forme aisément :

$$\frac{d^2Q}{dt^2}-A_0Q=(\frac{1}{2\pi})^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{d^2R}{dt^2}-A_0R)\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\,d\alpha\,d\beta\,;$$

et comme on a $\frac{d^2R}{dt^2}-A_0R=0$ (on s'en convaincra par la substitution des valeurs de $A_0$, R, $\frac{d^2R}{dt^2}$, ) il vient $\frac{d^2Q}{dt^2}-A_0Q=0$ ; d'où l'on tire, en différentiant :

$$A_0\frac{dQ}{dt}=\frac{d^3Q}{dt^3}=(\frac{1}{2\pi})^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3R}{dt^3}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}d\alpha\,d\beta\,;$$

$$=(\frac{1}{2\pi})^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{v_0t}+e^{v_1t}}{2}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}d\alpha\,d\beta\,,$$

$$=P. \quad (23)$$

Cette expression réduit l'intégrale complète (22 à la forme :

$$u=\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\varphi(\mu,\nu)\,d\mu\,d\nu\cdot P+\int_0^t dt\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{k}\psi(\mu,\nu)d\mu d\nu\cdot P. \quad (24$$

Pour achever le calcul de $u$, il suffira de réduire la double intégrale représentée par P. A cet effet, on a :

$$P=(\frac{1}{2\pi})^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{v_0t}+e^{v_1t}}{2}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}d\alpha\,d\beta\,,$$

$$=(\frac{1}{2\pi})^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{v_0t}+e^{v_1t}}{2}\cos\alpha\,(x-\mu)\cos\beta\,(y-\nu)\,d\alpha\,d\beta\,,$$

$$=(\frac{1}{2\pi})^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{b\sqrt{-1}(\alpha^2+\beta^2)t}+e^{-b\sqrt{-1}(\alpha^2+\beta^2)t}}{2}$$

$$\times\cos\alpha\,(x-\mu)\cos\beta\,(y-\nu)\,dx\,d\beta.$$

Mais on a, par la form. (25) du v$^{me}$ liv.,

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(\alpha^2+\beta^2)\cos a\alpha b\beta\,d\alpha d\beta=2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\beta\cos\frac{(a^2+b^2)\alpha}{4}f(\alpha\beta)d\alpha d\beta\,;$$

donc, en posant, pour abréger

$$s=(x-\mu)^2+(y-\nu)^2\ ,$$

on obtient :

$$P=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{(\alpha\beta)bt\sqrt{-1}}+e^{-(\alpha\beta)bt\sqrt{-1}}}{2}\cdot\sin\beta\cos\frac{s\alpha}{4}d\alpha d\beta\ ,$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{(\alpha\beta)bt\sqrt{-1}}+e^{-(\alpha\beta)bt\sqrt{-1}}}{2}\cdot\sin\beta\times$$

$$\frac{e^{\frac{s\alpha}{4}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{s\alpha}{4}\sqrt{-1}}}{2}d\alpha d\beta.$$

Fesons $\alpha bt=\alpha'$, $d\alpha=\frac{d\alpha'}{bt}$, les limites ne changeront pas, et l'on aura, en omettant les accents :

$$P=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{1}{bt}\int_0^\infty\int_0^\infty\cos(\alpha\beta)\sin\beta\cos\frac{s\alpha}{4bt}d\alpha d\beta\ ,$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{bt}\int_{-\infty}^\infty d\alpha\int_0^\infty\cos\alpha\left(\beta-\frac{s}{4bt}\right)\sin\beta d\beta+$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{1}{bt}\int_{-\infty}^\infty d\alpha\int_0^\infty\cos\alpha\left(\beta+\frac{s}{4bt}\right)\sin\beta d\beta.$$

Mais si dans les formules de Fourier [voir liv. III, form. (98'), (105)]

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\alpha\int_0^\infty\cos\alpha(x-\mu)f(\mu)d\mu,$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\alpha\int_0^\infty\cos\alpha(x+\mu)f(\mu)d\mu\ ,$$

on fait $\mu=\beta$, $x=\frac{s}{4bt}$, $f(\mu)=\sin\beta$, on trouve

$$\int_{-\infty}^\infty d\alpha\int_0^\infty\sin\beta\cos\alpha\left(\beta-\frac{s}{4bt}\right)d\beta=2\pi\sin\frac{s}{4bt}\ ,$$

$$\int_{-\infty}^\infty d\alpha\int_0^\infty\sin\beta\cos\alpha\left(\beta+\frac{s}{4bt}\right)d\beta=0\ ;$$

on a donc :

$$P=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{bt}\cdot 2\pi\sin\frac{s}{4bt}=\frac{1}{4\pi bt}\sin\frac{s}{4bt}=$$

$$\frac{1}{4\pi bt}\sin\frac{(\mu-x)^2+(\nu-y)^2}{4bt},$$

et par suite, pour l'intégrale cherchée :

$$u=\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k \varphi(\mu,\nu)\cdot\frac{1}{4\pi bt}\sin\frac{(\mu-x)^2+(\nu-y)^2}{4bt}\,d\mu\,d\nu+$$

$$\int_0^t dt\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k \psi(\mu,\nu)\cdot\frac{1}{4\pi bt}\sin\frac{(\mu-x)^2+(\nu-y)^2}{4bt}\,d\mu d\nu. \quad (25)$$

## 2$^{me}$ Exemple.

*Chercher* u = f(x,y,z,t) *étant donné*

$$\frac{d^2u}{dt^2}-b^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)=0, \quad (1$$

$$u=\varphi(x,y,z)\ \textit{pour}\ t=0,\quad \frac{du}{dt}=\psi(x,y,z)\ \textit{pour}\ t=0.$$

*Solut.* $T_0 e^{\alpha x\sqrt{-1}} e^{\beta y\sqrt{-1}} e^{\gamma z\sqrt{-1}}$, $T_1 e^{\alpha x\sqrt{-1}} e^{\beta y\sqrt{-1}} e^{\gamma z\sqrt{-1}}$ satisfesant à l'équation (1, ce qui exige que l'on ait :

$$\frac{d^2T_0}{dt}+b^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)T_0=0, \quad (2$$

$$\frac{d^2T_1}{dt^2}+b^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)T_1=0, \quad (3$$

on trouve, en opérant comme dans l'exemple précédent, et en ayant égard à la form. (121) du III$^{me}$ livre, que l'intégrale cherchée est de la forme :

$$(4.\quad u=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty T_0\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\times$$

$$e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\varphi(\mu,\nu,\varpi)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\mu\,d\nu\,d\varpi+$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_\delta^\varepsilon \int_\eta^k \int_\theta^\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_1 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} \times$$

$$e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \psi(\mu,\nu,\varpi)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\mu\, d\nu\, d\varpi ,$$

pourvu que les fonctions inconnnes $T_0$, $T_1$, de la variable $t$, soient telles que l'on ait :

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= 1 \text{ pour } t=0, \quad \frac{dT_0}{dt}=0 \text{ pour } t=0 ; \\ T_1 &= 0 \text{ pour } t=0, \quad \frac{dT_1}{dt}=1 \text{ pour } t=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5$$

Ajoutons aussi que les intégrales relatives à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ont pour limites $-\infty$, $+\infty$, tandis que les limites des intégrales qui se rapportent aux variables $\mu$, $\nu$, $\varpi$ demeurent quelconques, avec la seule condition qu'elles comprennent ces quantités.

Pour déterminer $T_0$, $T_1$, observons que $s$ étant une fonction de $t$ et de $v$, si l'on avait :

$$s + T_0 + T_1 v, \qquad (6$$

les conditions (5 seraient remplies, si $s$ était tel que l'on eût

$$\left.\begin{aligned} s &= 1 \text{ pour } t=0 \\ \frac{ds}{dt} &= v \text{ pour } t=0 ; \end{aligned}\right\} \qquad (7$$

ce qui exige que $s$ soit de la forme

$$S = e^{vt}. \qquad 8$$

De plus, à l'aide de l'équation (6, les conditions (2 et (3 se réduisent à la condition unique

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + b^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) s = 0. \qquad (9$$

Mais comme (8 doit satisfaire à (9, on trouve :

$$v^2 + b^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0 ; \qquad (10$$

d'où :

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= b\sqrt{-1}\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}, \\ v_1 &= -b\sqrt{-1}\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (11$$

Par conséquent les deux intégrales particulières de (9 sont :

$$s = e^{v_0 t}, \quad s = e^{v_1 t} ; \qquad (12$$

donc, en ayant égard aux conditions (7, l'intégrale générale de cette équation sera :

$$s = [v^2 + b^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)] \left\{ \frac{e^{v_0 t}}{2v_0(v-v_0)} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1(v-v_1)} \right\},$$

$$= -b^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{e^{v_0t}}{2v_0^2}+\frac{e^{v_1t}}{2v_1^2}\right] -$$

$$-b^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{e^{v_0t}}{2v_0^3}-\frac{e^{v_1t}}{2v_1^3}\right]v + \text{etc.}, \quad (13$$

qui se réduit, comme il est facile de s'en convaincre, à 1 pour $t=0$, et donne $\frac{ds}{dt}=v$, pour $t=0$.

En comparant (13 avec (6, on trouve :

$$T_0 = -b^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{e^{v_0t}}{2v_0^2}+\frac{e^{v_1t}}{2v_1^2}\right],$$

$$T_1 = -b^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{e^{v_0t}}{2v_0^3}+\frac{e^{v_1t}}{2v_1^3}\right].$$

Fesons pour abréger $b^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=A_0$,

$$R = \frac{e^{v_0t}}{2v_0^3}+\frac{e^{v_1t}}{2v_1^3},$$

d'où :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{e^{v_0t}}{2v_0^2}+\frac{e^{v_1t}}{2v_1^2},$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{e^{v_0t}}{2v_0}+\frac{e^{v_1t}}{2v_1},$$

$$\frac{d^3R}{dt^3} = \frac{e^{v_0t}+e^{v_1t}}{2}, \quad (14$$

on aura : $T_0 = -A_0\frac{dR}{dt}$, $T_1 = -A_0R$,

et on trouvera aisément, par la substitution des valeurs :

$$\frac{d^2R}{dt^2}+A_0R=0. \quad (15$$

Soit maintenant

$$Q=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\,d\alpha d\beta d\gamma; \quad (16$$

on trouvera, à cause de (15 :

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+A_0Q=0.$$

On tire de celle-ci :

$$17),\quad -A_o\frac{dQ}{dt}=\frac{d^3Q}{dt^3}=$$

$$(\frac{1}{2\pi})^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3R}{d^3t}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\,d\alpha d\beta d\gamma,$$

et de (16 :

$$18),\quad \frac{A_o dQ}{dt}=(\frac{1}{2\pi})^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A_o\frac{dR}{dt}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\times e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\,d\alpha d\beta d\gamma.$$

Cela posé, l'intégrale cherchée devient successivement :

$$u=\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\varphi(\mu,\nu,\varpi)d\mu\,d\nu\,d\varpi\times$$

$$(\frac{1}{2\pi})^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}-A_o\frac{dR}{dt}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}.e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}.e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\,d\alpha d\beta d\gamma+$$

$$\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\psi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\times$$

$$(\frac{1}{2\pi})^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}-A_oR\,e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}e^{\gamma(z-\nu)\sqrt{-1}}\,d\alpha d\beta d\gamma,$$

$$=\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\varphi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\times-A_o\frac{dQ}{dt}+$$

$$\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\psi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\times-A_oQ,$$

$$=\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\varphi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\times-A_o\frac{dQ}{dt}+$$

$$\int_0^t dt\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\psi(\mu,\nu,\varpi)d\mu\,d\nu\,d\varpi\times-A_o\frac{dQ}{dt},$$

$$=\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta \varphi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\cdot\frac{d^3Q}{dt^3}+$$

$$\int_0^t dt\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta \psi(\mu,\nu,\varpi)d\mu\,d\nu\,d\varpi\cdot\frac{d^3Q}{dt^3}. \quad (19$$

Nous allons procéder maintenant à la réduction de l'intégrale triple représentée par $\frac{d^3Q}{dt^3}$.

Pour cela écrivons à la place de l'équation (17 :

$$\frac{d^3Q}{dt^3}=(\frac{1}{2\pi})^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3R}{dt^3}\cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)\cos\gamma(z-\varpi)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

$$=(\frac{1}{2\pi})^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{v_0t}+e^{v_1t}}{2}\cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)\times\cos(z-\varpi)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

$$=(\frac{1}{2\pi})^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}bt\sqrt{-1}}+e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}bt\sqrt{-1}}}{2}\times\cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)\cos\gamma(z-\varpi)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Mais on a, par la form. (11) du v$^{me}$ livre :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)\cos a\alpha\cos b\beta\cos c\gamma\ldots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots$$

$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos s^{\frac{1}{2}}\alpha\,f(\alpha^2)d\alpha\,;$$

donc, pour $n=3$, $s=r^2=(x-\mu)^2+(y-\nu)^2+(z-\varpi)^2$, on a :

$$\frac{d^3Q}{dt^3}=(\frac{1}{2\pi})^3(-1)^1\,2^2\pi\frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty}\cos s^{\frac{1}{2}}\alpha\frac{e^{\alpha bt\sqrt{-1}}+e^{-\alpha bt\sqrt{-1}}}{2}d\alpha,$$

$$=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty}\cos s^{\frac{1}{2}}\alpha d\alpha\cos(\alpha bt),$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2r}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(r\alpha)\cos(\alpha bt)\,d\alpha.$$

$$=P. \qquad (20$$

En substituant cette valeur dans (19, l'intégrale cherchée prend la forme :

$$u = \int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta \varphi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi \cdot \mathrm{P} + \int_0^t dt \int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta \psi(\mu,\nu,\varpi)\cdot \mathrm{P}. \qquad (21$$

Cette forme n'est pas la plus simple, car l'intégration désignée par P, peut être effectuée, en considérant l'expression

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(r\alpha)\cos(\alpha bt)\,d\alpha,$$

comme la limite par rapport à $\lambda$ de l'expression

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2}} \cos(\alpha bt)\cos(r\alpha)\,d\alpha\,,$$

$\lambda$ étant une quantité infiniment petite, qu'il faut remplacer par zéro après les intégrations finales.

Or on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2}}\cos(\alpha bt)\cos(r\alpha)\,d\alpha = 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha}\cos(\alpha bt)\cos(r\alpha)\,d\alpha\,,$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha}\cos\alpha(r-bt)\,d\alpha + \int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha}\cos\alpha(r+bt)\,d\alpha\,,$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2+(r+bt)^2}.$$

Comme $r = [(\mu-x)^2+(\nu-y)^2+(\varpi-z)^2]^{\frac{1}{2}}$, est positif entre 0 et $\infty$, le second terme du 2[d] membre est nul. Il n'en est pas de même du 1[er] terme, car si $r-bt$ est aussi infiniment petit, ce qui arrive lorsque $r$ diffère infiniment peu de $bt$, alors ce terme cessera d'être infiniment petit ou nul; on a donc, pour cette valeur de $r$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2}}\cos(\alpha bt)\cos(r\alpha)\,d\alpha = \frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\;;$$

par conséquent :

$$\mathrm{P} = -\frac{1}{4\pi r}\cdot\frac{d}{dr}\left[\frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\right] = \frac{1}{4\pi br}\cdot\frac{d\left[\frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\right]}{dt}\;;$$

par suite l'intégrale cherchée sera exprimée par :

$$u=\frac{d}{dt}\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta \frac{1}{4\pi^2 br}\ \frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\,\varphi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi +$$

$$\int dt\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta \frac{1}{4\pi^2 br}\cdot\frac{d}{dt}\Big[\frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\Big]\psi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\,,$$

$$=\frac{d}{dt}\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta \frac{1}{4\pi^2 br}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\,\varphi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi +$$

$$\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta \frac{1}{4\pi^2 br}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\,\psi(\mu,\nu,\varpi)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\,. \qquad (22$$

Il faut observer, qu'après avoir effectué les intégrations indiquées, on devra poser $\lambda=0$.

On obtient pour l'intégrale $u$ une forme indépendante de $\lambda$, lorsqu'on introduit des coordonnées polaires.

Soient, en effet, $x, y, z$ les coordonnées de la nouvelle origine, on devra poser

$$\mu=x+r\cos p\,,\quad \nu=y+r\sin p\cos q\,,\quad \varpi=z+r\sin p\sin q\,;$$

et l'on trouvera, par les règles du 1^er^ livre, pour le changement des variables, $d\mu\,d\nu\,d\varpi=r^2\sin p\,dp\,dq\,dr$. Supposons de plus que les limites des intégrations $\delta, \varepsilon$, etc., soient $-\infty$, $+\infty$, alors les limites des nouvelles variables seront

$$p=\Big\{_0^\pi\,,\quad q=\Big\{_0^{2\pi}\,,\quad r=\Big\{_0^\infty\,,$$

par conséquent la form. (22 prend la forme :

$$u=\frac{1}{4\pi^2 b}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\psi(x+r\cos p\,,\ y+r\sin p\cos q\,,\ z+r\sin p\sin q)$$

$$\times\ \frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\,r\sin p\,dp\,dq\,dr\ +$$

$$\frac{1}{4\pi^2 b}\ \frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\varphi(x+r\cos p,\ y+r\sin p\cos q,\ z+r\sin p\sin q)$$

$$\times\ \frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\,r\sin p\,dp\,dq\,dr.$$

Comme, par hypothèse $r$ diffère infiniment peu de $bt$, on peut écrire :

$$\psi(x+r\cos p,\ y+r\sin p\cos q,\ z+r\sin p\sin q)\, r\sin p =$$
$$\psi(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q) bt\sin p\ ;$$

donc :

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\psi(x+r\cos p,\ y+r\sin p\cos q,\ z+r\sin p\sin q)\times$$
$$r\sin p dr = \psi(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q)\times$$
$$bt\sin p\int_0^\infty \frac{\lambda dr}{\lambda^2+(r-bt)^2} = \pi bt\sin p\psi(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,$$
$$z+bt\sin p\sin q.$$

On a donc aussi :

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2+(r-bt)^2}\varphi(x+r\cos p,\ y+r\sin p\cos q,\ z+r\sin p\sin q)\times$$
$$r\sin p dr = \pi bt\sin p\psi(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q, z+bt\sin p\sin q).$$

On a donc enfin :

$$u=\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\sin p\psi(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q)$$
$$dpdq +$$
$$\frac{1}{4\pi}\ \frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\sin p\varphi(x+bt\cos p,\ y+bt\sin p\cos q,\ z+bt\sin p\sin q)$$
$$dpdq. \qquad (23$$

Cette intégrale est due à Poisson.

### 3me Exemple.

*Chercher* u = f(x, t) *étant donné*

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{d^2u}{dx^2}=0, \qquad (1$$

$$u=\varphi(x) \textit{ pour } t=0,\quad \frac{du}{dt}=\psi(x) \textit{ pour } t=0.$$

*Solution.* Si $T_0, T_1$, étant des fonctions de $t$, les expressions

$$u=T_0 e^{ax\sqrt{-1}},\quad u=T_1 e^{ax\sqrt{-1}},$$

satisfesant à la proposée, ce qui exige que l'on ait :

$$\frac{d^2T_0}{dt^2}-\alpha^2T_0=0,\quad \frac{d^2T_1}{dt^2}-\alpha^2T_1=0, \qquad (2$$

l'intégrale complète sera de la forme :

$$2') \quad u = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} T_0 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} \varphi(\mu)\, d\mu\, d\alpha +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} T_1 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} \psi(\mu)\, d\mu\, d\alpha ,$$

pourvu que les conditions

$$\left.\begin{aligned} T_0 = 1,\ \frac{dT_0}{dt} = 0, \\ T_1 = 0,\ \frac{dT_1}{dt} = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (3$$

pour $t=0$, soient remplies.

Mais en supposant

$$s = T_0 + T_1 v , \qquad (4$$

$$s = e^{vt}, \qquad (5$$

les conditions (3 seront remplies, puisque pour $t=0$, on a $s=1$, $\frac{ds}{dt} = v$. De plus, l'équation unique

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \alpha^2 s = 0 , \qquad (6$$

remplacera les deux équations (2.

A cause de (5, l'expression (6 donne :

$$v^2 - \alpha^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad v_0 = +\alpha,\ v_1 = -\alpha ,$$

et par suite, les intégrales particulières de (6 seront :

$$s = e^{v_0 t} = e^{\alpha t}, \quad s = e^{v_1 t} = e^{-\alpha t}. \qquad (7$$

On a donc, pour l'intégrale complète ou générale de (6 ,

$$s = (v^2 - \alpha^2)\left\{ \frac{e^{v_0 t}}{2v_0(v - v_0)} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1(v - v_1)} \right\},$$

$$= \alpha^2 \left[\frac{e^{v_0 t}}{2v_0^2} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1^2}\right] + \alpha^2 \left[\frac{e^{v_0 t}}{2v_0^3} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1^3}\right] v + \text{etc.} \qquad (8$$

Par la comparaison de (4, et de (8, on trouve :

$$T_0 = \alpha^2 \left(\frac{e^{v_0 t}}{2v_0^2} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1^2}\right), \quad T_1 = \alpha^2 \left(\frac{e^{v_0 t}}{2v_0^3} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1^3}\right).$$

Fesons $$R = \frac{e^{v_0 t}}{2v_0^3} + \frac{e^{v_1 t}}{2v_1^3},$$ d'où :

$$\frac{d^3R}{dT^3} = \frac{e^{v_0 t} + e^{v_1 t}}{2} = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}, \quad T_0 = \alpha^2 \frac{dR}{dt}, \quad T_1 = \alpha^2 R,$$

et $$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} d\alpha,$$

on a : $$\alpha^2 Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^2R\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} d\alpha,$$

$$\alpha^2 \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \frac{dR}{dt}\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} d\alpha,$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} - \alpha^2 Q = 0; \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{d^3Q}{dt^3} = \frac{\alpha^2 dQ}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dR^3}{dt^3}\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} d\alpha,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} d\alpha,$$

$$= P. \qquad (9$$

Par conséquent l'intégrale complète (2′ deviendra :

$$u = \int_{\delta}^{\varepsilon} \varphi(\mu)d\mu \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T_0 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} d\alpha +$$

$$\int_{\delta}^{\varepsilon} \psi(\mu)d\mu \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T_1 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} d\alpha,$$

$$= \int_{\delta}^{\varepsilon} \varphi(\mu)d\mu \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \frac{dR}{dt} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} dx +$$

$$\int_{\delta}^{\varepsilon} \psi(\mu)d\mu \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 R\, e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}} d\alpha,$$

$$= \int_{\delta}^{\varepsilon} \varphi(\mu)d\mu \cdot \alpha^2 \frac{dQ}{dt} + \int_{\delta}^{\varepsilon} \psi(\mu)d\mu \cdot \alpha^2 Q,$$

$$=\int_{\delta}^{\varepsilon}\varphi(\mu)d\mu\cdot\alpha^2\frac{dQ}{dt}+\int_{\delta}^{\varepsilon}\psi(\mu)d\mu\int\alpha^2\frac{dQ}{dt}dt\,,$$

$$=\int_{\delta}^{\varepsilon}\varphi(\mu)d\mu\cdot\frac{d^3Q}{dt^3}+\int_{\delta}^{\varepsilon}\psi(\mu)d\mu\int\frac{d^3Q}{dt^3}dt\,,$$

$$=\int_{\delta}^{\varepsilon}\varphi(\mu)d\mu\cdot\mathrm{P}+\int_{\delta}^{\varepsilon}\psi(\mu)d\mu\int\mathrm{P}dt. \qquad (10$$

Mais on a, par (9 :

$$\mathrm{P}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}d\alpha\,,$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\cos\alpha\,(x-\mu)dx\,;$$

donc :

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\varphi(\mu)d\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\cos\alpha(x-\mu)d\alpha+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\psi(\mu)d\mu\int dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\cos\alpha(x-\mu)d\alpha. \qquad (10$$

Pour intégrer l'expression $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\cos\alpha\,(x-\mu)d\alpha$,

nous introduirons le facteur $e^{-k\alpha^2}$, $k$ étant infiniment petit, et nous considérerons l'expression précédente comme la limite par rapport à $k$ de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t-k\alpha^2}+e^{-\alpha t-k\alpha^2}}{2}\cos\alpha\,(x-\mu)d\alpha\,;$$

on aura alors :

$$\mathrm{P}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha t-k\alpha^2}+e^{-\alpha t-k\alpha^2}}{2}\cos\alpha(x-\mu)d\alpha\,,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(\alpha-\frac{t}{2k})^2} \cdot e^{\frac{t^2}{4k}} \cos\alpha(x-\mu)d\alpha +$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(\alpha-\frac{t}{2k})^2} \cdot e^{\frac{t^2}{4k}} \cos\alpha\,(x-\mu)\,d\alpha\,,$$

$$= \frac{1}{4\pi} e^{\frac{t^2}{4k}} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(\alpha-\frac{t}{2k})^2} \cos\alpha(x-\mu)d\alpha +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(\alpha+\frac{t}{2k})^2} \cos\alpha(x-\mu)d\alpha\Big].$$

En effectuant les intégrations indiquées, et en ayant égard à la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2z^2}\cos 2bz\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-(\frac{b}{a})^2},$$

on trouve, en posant $\mu = x + 2k^{\frac{1}{2}}\omega$,

$$(11, \quad u = (\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t^2}{4k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} \cos(\frac{\omega t}{\sqrt{k}}) \varphi(x + 2\sqrt{k}\,\omega)d\omega +$$

$$(\frac{1}{\pi})^2 \int e^{\frac{t^2}{4k}} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\cos(\frac{\omega t}{\sqrt{k}})\,\psi\,(x+2\sqrt{k}\,\omega)d\omega.$$

### 4me Exemple.

*Chercher la valeur de* u = f(x, y, z, t) *étant donné*

$$\frac{du}{dt} = a\,(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2})\,, \qquad (1$$

$$u = \varphi(x,y,z) \text{ pour } t = 0.$$

*Solution.* En supposant que $T_0 e^{\alpha x\sqrt{-1}} e^{\beta y\sqrt{-1}} e^{\gamma z\sqrt{-1}}$, satisfasse à (1, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{dT_0}{dt} + a(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)T_0 = 0\,, \qquad (2$$

on aura, pour la forme de l'intégrale complète :

$$(3.\quad u=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T_o e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\times$$
$$e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\varphi(\mu,\nu,\varpi)d\mu\,d\nu\,d\varpi\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

pourvu que l'on ait : $T_o=1$, pour $t=0$; donc

$$T_o=e^{vt},$$

devra satisfaire à (2; on a donc, en substituant :

$$v+a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0,\quad v=-a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2);$$

donc $$T_o=e^{-a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}.$$

Par là, on obtient à la place de (3 :

$$u=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\times$$
$$e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\varphi(\mu,\nu,\varpi)d\mu\,d\nu\,d\varpi\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

$$=\int_\delta^\varepsilon\int_\eta^k\int_\theta^\zeta\varphi(\mu,\nu,\varpi)d\mu\,d\nu\,d\varpi\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}\times$$
$$e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Soient $$s=(x-\mu)^2+(y-\mu)^2+(z-\varpi)^2,$$

$$P=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}$$
$$\times e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}\cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)$$
$$\times\cos\gamma(z-\varpi)d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Mais à cause de la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots f(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)\cos a\alpha\cos b\beta\cos c\gamma\ldots d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots=$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{s}\cdot\alpha f(\alpha^2)d\alpha,$$

on a, pour $n=3$, et à cause de la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\alpha^2 t} \cos s^{\frac{1}{2}} \alpha \, d\alpha = \left(\frac{\pi}{at}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{4at}},$$

$$\mathrm{P} = -4\pi \cdot \frac{1}{8\pi^3} \cdot \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} \cos s^{\frac{1}{2}} \alpha \cdot e^{-a\alpha^2 t} d\alpha,$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\alpha^2} \cos s^{\frac{1}{2}} \alpha \, d\alpha,$$

$$\mathrm{P} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{d\left[\left(\frac{\pi}{at}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{4at}}\right]}{ds},$$

$$= + \frac{1}{8(\pi at)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{s}{4at}},$$

$$= \frac{1}{8(a\pi)^{\frac{3}{2}}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\mu-x)^2+(\nu-y)^2+(\varpi-z)^2}{4at}},$$

donc enfin :

$$u = \int_{\delta}^{\varepsilon} \int_{\eta}^{k} \int_{\theta}^{\zeta} \mathrm{P} \, \varphi(\mu, \nu, \varpi) d\mu \, d\nu \, d\varpi,$$

$$= \frac{1}{8(a\pi)^{\frac{3}{2}}} t^{-\frac{3}{2}} \int_{\delta}^{\varepsilon} \int_{\eta}^{k} \int_{\theta}^{\zeta} \varphi(\mu, \nu, \varpi) e^{-\frac{(\mu-x)^2+(\nu-y)^2+(\varpi-z)^2}{4at}} d\mu d\nu d\varpi.$$

Nous allons terminer l'exposition de la Méthode de Cauchy, en traitant l'exemple général qui comprend tous les précédents, savoir :

### 5me Exemple.

*Chercher* $\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots \mathrm{t})$ *étant donné*

$$\frac{\mathrm{d}^m \mathrm{u}}{\mathrm{d}\mathrm{t}^m} - \mathrm{a}\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{d}\mathrm{x}^2} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{d}\mathrm{y}^2} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{d}\mathrm{z}^2} + \ldots\right)^{\mathrm{l}} = 0,$$

$\mathrm{u} = \mathrm{f}_0(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots)$ *pour* $\mathrm{t} = 0$, $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{f}_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots)$ *pour* $\mathrm{t} = 0$, etc.

$\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{u}}{\mathrm{dt}^{m-1}} = \mathrm{f}_{m-1}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots)$ *pour* $\mathrm{t} = 0$ ; *on suppose que le nombre des variables* x, y, z.., *est* n.

*Solution.* Supposons que les expressions

(1′ $T_0 e^{\alpha x\sqrt{-1}} e^{\beta y\sqrt{-1}} e^{\gamma z\sqrt{-1}} \ldots,\ T_1 e^{\alpha x\sqrt{-1}} e^{\beta y\sqrt{-1}} e^{\gamma z\sqrt{-1}} \ldots$ etc., $T_{m-1} e^{\alpha x\sqrt{-1}} e^{\beta y\sqrt{-1}} e^{\gamma z\sqrt{-1}} \ldots$, satisfassent à la proposée (1, et que l'on ait par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d^m T_0}{dt^m} - (-1)^l a(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^3 + \ldots)^l T_0 = 0\,, \\
\dfrac{d^m T_1}{dt^m} - (-1)^l a(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots)^l T_1 = 0\,, \\
\text{etc.} \\
\dfrac{d^m T_{m-1}}{dt^{m-1}} - (-1)^l a(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots)^l T_{m-1} = 0\,,
\end{array}\right\} \quad (2$$

il est clair, qu'en soumettant les fonctions de $t$ désignées par

$$T_0,\ T_1,\ \ldots\ T_{m-1}\,,$$

aux conditions d'avoir

$$\left.\begin{array}{l}
T_0 = 1\,,\ \dfrac{dT_0}{dt} = 0\,,\ \dfrac{d^2T_0}{dt^2} = 0\,,\ \text{etc., pour } t=0\,, \\
T_1 = 0\,,\ \dfrac{dT_1}{dt^2}\,,\ \dfrac{d^2T_1}{dt^2} = 0\,,\ \text{etc. pour } t=0\,, \\
T_2 = 0\,,\ \dfrac{dT_2}{dt} = 0\,,\ \dfrac{d^2T_1}{dt^2} = 1\,,\ \text{pour } t=0\,, \\
\qquad \text{etc.} \\
T_{m-1} = 0\,,\ \dfrac{dT_{m-1}}{dt} = 0\,,\ \text{etc.,}\ \dfrac{d^{m-1}t_{m-1}}{dt^{m-1}} = 1 \text{ pour } t=0\,,
\end{array}\right\} \quad (3$$

et en fesant

$$(4 \left\{\begin{array}{l}
u_0 = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^n \int\int\int \ldots T_0 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots \\
\qquad\qquad f_0(\mu, \nu, \varpi \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots d\alpha d\beta d\gamma \ldots\,, \\
u_1 = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^n \int\int\int \ldots T_1 e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots \\
\qquad\qquad f_1(\mu, \nu, \varpi, \ldots) d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots\,, \\
\text{etc.,} \qquad \text{etc.} \\
u_{m-1} = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^n \int\int\int \ldots T_{m-1} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} \times \\
\qquad e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots f_{m-1}(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots\,,
\end{array}\right.$$

on aura pour l'intégrale complète

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_{m-1}\,. \quad (5$$

En effet, 1° chacune des relations (4, à cause de l'hyp. (1', satisfesant à la proposée, il en sera de même de leur somme.

2° Pour $t=0$, on a $u_1=0$, etc. $u_{m-1}=0$, donc $u=u^\circ=f_0(x,y,z,\ldots)$.

3° On a : $\frac{du}{dt}=\frac{du_0}{dt}+\frac{du_1}{dt}+\ldots+\frac{du_{m-1}}{dt^{m-1}}$; donc, à cause des relations (3, on a : $\frac{du_0}{dt}=0$, etc. $\frac{du_{m-1}}{dt^{m-1}}=0$, pour $t=0$;

donc $\frac{du}{dt}=\frac{du_1}{dt}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int\int\int\ldots e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\ldots\times$

$$f_1(\mu,\nu,\ldots)\,d\mu d\nu\ldots d\alpha d\beta\ldots$$

$$=f_1(x,y,z,\ldots).$$

etc.

Cela posé, si l'on avait la relation

$$s=T_0+T_1v+\ldots+T_{m-1}v^{m-1}, \qquad (6$$

et que la fonction $s$ soit telle qu'on ait, pour $t=0$,

$$(7, \qquad s=1, \ \frac{ds}{dt}=v, \text{ etc., } \frac{d^{m-1}s}{dt^{m-1}}=v^{m-1},$$

ce qui exige que $s$ soit de la forme

$$s=e^{vt}, \qquad (8$$

il est clair que les conditions (3 seraient remplies, et qu'en même temps les équations (2, pourraient être remplacées par la relation unique

$$\frac{d^m s}{dt^m}-(-1)^l a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)^l s=0. \qquad (9$$

Mais puisque (8 doit satisfaire à cette relation, on trouve

$$v^m-(-1)^l a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)^l s=0; \qquad (10$$

et si nous fesons

$$\lambda^m=(-1)^l\cdot a,$$

et que $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}$, désignent les $m$ racines de cette équation, on trouvera, pour les $m$ racines $v_0, v_1, \ldots v_{m-1}$, de l'équation

$$v^m=(-1)^l a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots), \qquad (11$$

les expressions : $v_0=\lambda_0(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)^{\frac{l}{m}}$,

$v_1=\lambda_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)^{\frac{l}{m}}$, etc., $v_{m-1}=\lambda_{m-1}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)^{\frac{l}{m}}$

et par suite, les $m$ intégrales particulières de (9 :

$$s = e^{v_0 t},\ s = e^{v_1 t},\ \dots\ s = e^{v_{m-1} t}.$$

Ces intégrales devant satisfaire aux conditions (7, si nous fesons pour abréger

$$A_0 = (-1)^l a(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)^l,$$
$$F(v) = v^m - A_0,\ F'(v) = mv^{m-1},$$

on trouve pour l'intégrale générale de (9 :

$$s = F(v)\left\{\frac{e^{v_0 t}}{(v - v_0)F'(v_0)} + \frac{e^{v_1 t}}{(v - v_1)F'(v_1)} + \dots + \frac{e^{v_{m-1} t}}{(v - v_{m-1})F'(v_{m-1})}\right\},$$

$$= (v^m - A_0)\left\{\frac{e^{v_0 t}}{mv^{m-1}(v - v_0)} + \frac{e^{v_1 t}}{mv_1^{m-1}(v - v_1)} + \dots + \frac{e^{v_{m-1} t}}{mv_{m-1}^{m-1}(v - v_{m-1})}\right\}.$$

En développant cette dernière expression en série ordonnée selon les puissances croissantes de $v$, on obtient :

$$s = A_0\left\{\frac{e^{v_0 t}}{mv_0^m} + \frac{e^{v_1 t}}{mv_1^m} + \dots + \frac{e^{v_{m-1} t}}{mv_{m-1}^m}\right\} +$$
$$A_0\left\{\frac{e^{v_0 t}}{mv_0^{m+1}} + \frac{e^{v_1 t}}{mv_1^{m+1}} + \dots + \frac{e^{v_{m-1} t}}{mv_{m-1}^{m+1}}\right\} v + \text{etc.} +$$
$$A_0\left\{\frac{e^{v_0 t}}{mv_0^{2m-1}} + \frac{e^{v_1 t}}{mv_1^{2m-1}} + \dots + \frac{e^{v_{m-1} t}}{mv_{m-1}^{2m-1}}\right\} v^{m-1} + \text{etc. (12}$$

La comparaison des relations (12 et (6, fournit :

$$T_0 = A_0\left\{\frac{e^{v_0 t}}{mv_0^m} + \frac{e^{v_1 t}}{mv_1^m} + \dots + \frac{e^{v_{m-1} t}}{mv_{m-1}^m}\right\},$$

$$T_1 = A_0\left\{\frac{e^{v_0 t}}{mv_0^{m+1}} + \frac{e^{v_1 t}}{mv_1^{m+1}} + \dots + \frac{e^{v_{m-1} t}}{mv_{m-1}^{m+1}}\right\},$$

etc. etc.

$$T_{m-1} = A_0\left\{\frac{e^{v_0 t}}{mv_0^{2m-1}} + \frac{e^{v_1 t}}{mv_1^{2m-1}} + \dots + \frac{e^{v_{m-1} t}}{mv_{m-1}^{2m-1}}\right\}.$$

Soit, pour abréger,

$$R = \frac{1}{m}\left\{\frac{e^{v_0 t}}{v_0^{2m-1}} + \frac{e^{v_1 t}}{v_1^{2m-1}} + \dots + \frac{e^{v_{m-1} t}}{v_{m-1}^{2m-1}}\right\},$$

on aura :

$$\frac{d^{2m-1}R}{dt^{2m-1}} = \frac{e^{v_0 t} + e^{v_1 t} + \ldots + e^{v_{m-1} t}}{m}, \qquad (13$$

$$\text{et}, \quad T_0 = A_0 \frac{d^{m-1}R}{dt^{m-1}}, \quad T_1 = A_0 \frac{d^{m-2}R}{dt^{m-2}}, \text{ etc. } \quad T_{m-1} = A_0 R. \qquad (14$$

Soit de plus

$$Q = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots R\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots, \qquad (15$$

on aura :

$$A_0 \frac{d^{m-1} Q}{dt^{m-1}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots A_0 \frac{d^{m-1}R}{dt^{m-1}} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta \ldots,$$

$$\frac{d^m Q}{dt^m} - A_0 Q = 0; \text{ d'où : } \frac{d^{2m-1}Q}{dt^{2m-1}} - A_0 \frac{d^{m-1}Q}{dt^{m-1}} = 0.$$

Donc

$$\frac{d^{2m-1}Q}{dt^{2m-1}} = A_0 \frac{d^{m-1}Q}{dt^{m-1}} =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \frac{d^{2m-1}R}{dt^{2m-1}} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots,$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \frac{e^{v_0 t} + e^{v_1 t} + \ldots + e^{v_{m-1} t}}{m} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} \times e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots,$$

$$= P. \qquad (16.$$

Si dans (5 nous mettons pour $u_0$, $u_1$, etc., $u_{m-1}$, leurs valeurs (4, en ayant égard aux expressions précédentes, on trouve successivement :

$$u = \iint \ldots f_0(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots \times$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots A_0 \frac{d^{m-1}R}{dt^{m-1}} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta \ldots +$$

$$\iint \ldots f_1(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi \ldots \times$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots A_0 \frac{d^{m-2}R}{dt^{m-2}} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}} \ldots d\alpha\, d\beta \ldots +$$

etc.

$$+\iint\ldots(\mu,\nu,\varpi,\ldots)\,d\mu\,d\nu\,d\varpi\ldots\times$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots A_0 R\, e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\ldots d\alpha\, d\beta\ldots,$$

$$=\iint\ldots f_0(\mu,\nu,\ldots)d\mu\, d\nu\ldots A_0\frac{d^{m-1}Q}{dt^{m-1}}+$$

$$\int dt\iint\ldots f_1(\mu,\nu\ldots)d\mu\, d\nu\ldots A_0\frac{d^{m-1}Q}{dt^{m-1}}+$$

$$\iint dt\iint\ldots f_2(\mu,\nu,\ldots)\,d\mu\, d\nu\ldots A_0\frac{d^{m-1}Q}{dt^{m-1}}+\text{etc}\ldots$$

$$+\int^{m-1} dt\iint\ldots f_{m-1}(\mu,\nu,\ldots)d\mu\, d\nu\ldots A_0\frac{d^{m-1}Q}{dt^{m-1}},$$

$$=\iint\ldots Pf_0(\mu,\nu,\ldots)d\mu, d\nu\ldots+\int dt\iint\ldots Pf_1(\mu,\nu\ldots)d\mu\, d\nu\ldots+$$

$$\iint dt\iint\ldots Pf_2(\mu,\nu,\ldots)d\mu\, d\nu\ldots+\text{etc.}+$$

$$\int^{m-1} dt\iint\ldots Pf_{m-1}(\mu,\nu,\ldots)d\mu\, d\nu\ldots \qquad (17$$

Le signe $\int^{m-1}$ est employé ici pour marquer $m-1$ intégrations consécutives.

Comme on a, par la form. (16,

$$P=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\frac{e^{v_0 t}+e^{v_1 t}+e^{v_{m-1}t}}{m}\cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)\ldots d\alpha\, d\beta\ldots$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\frac{e^{\lambda_0(\alpha^2+\beta^2+\ldots)^{\frac{l}{m}}t}+e^{\lambda_1(\alpha^2+\beta^2+\ldots)^{\frac{l}{m}}t}+\ldots+e^{\lambda_{m-1}(\alpha^2+\beta^2+\ldots)^{\frac{l}{m}}t}}{m}$$

$$\times\cos\alpha(x-\mu)\cos\beta(y-\nu)\ldots d\alpha\, d\beta\ldots$$

On obtiendra, par les formules de réduction déjà citées,

1° si $n$ est impair,

$$P=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos s^{\frac{1}{2}}\alpha\, d\alpha$$

$$\times\left[\frac{e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_0 t}+e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_1 t}+\ldots e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_{m-1}t}}{m}\right], \qquad (18$$

$$s=(\mu-x)^2+(\nu-y)^2+\text{etc.};$$

2° si $n$ est pair,

on aura, à cause de la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots \mathrm{f}(\alpha^2+\beta^2+\ldots)\cos a\alpha\cos b\beta\ldots d\alpha d\beta\ldots =$$

$$4\pi^{\frac{n}{2}-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\theta^2\tau^2-\frac{a^2+b^2+\ldots}{4\theta^2}\right)\mathrm{f}(\tau^2)\frac{d\theta}{\theta^{n-1}}\tau d\tau\,,$$

l'expression :

$$P=\frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}+1}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_0 t}+e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_1 t}+\ldots+e^{\alpha^{\frac{2l}{m}}\lambda_{m-1} t}}{m}\times$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\alpha^2\beta^2-\frac{s}{4\beta^2}\right)\frac{d\beta}{\beta^{n-1}}\alpha d\alpha. \quad (19$$

En substituant (18 dans (17, on aura l'intégrale complète pour le cas de $n$ impair; et en substituant (19 dans (17, on aura la même intégrale pour le cas de $n$ pair.

## 2me SECTION.

## INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES PAR L'EMPLOI DE SÉRIES D'EXPONENTIELLES.

---

### ($a$) MÉTHODE DE FOURIER, LAGRANGE, ETC.

Soient $\quad L=0, \quad (1 \qquad l=0,\ l'=0,$ etc. $\quad$ (2

plusieurs équations simultanées aux différences partielles, $u=\mathrm{f}(x,y,\ldots t)$, l'inconnue, qui, pour $t=0$, se réduise à l'état initial $u=\mathrm{F}(x)$, F désignant une fonction arbitraire; cela posé, la méthode qui nous occupe consiste principalement dans les points suivants.

1. On cherche une valeur particulière de la forme exponentielle

$$u=e^{-st}\varphi(r)\,, \qquad (3$$

satisfesant à l'équation (1.

2. On substitue la valeur (3 dans les équations (2, ce qui con-

duit à une équation (ordinairement transcendante), en $\varsigma$, de la forme $$\psi(\varsigma)=0. \qquad (4$$

3. On démontre que les racines de cette équation sont réelles; et en les désignant par

$$\varsigma_1,\ \varsigma_2,\ \varsigma_n,\ \ldots$$

on forme, à l'aide de (3, la suite des intégrales particulières

$$e^{-\varsigma_1 t}\varphi(r_1),\ e^{-\varsigma_2 t}\varphi(r_2),\ \ldots,\ e^{-\varsigma_n t}\varphi(r_n),\ \ldots \qquad (5$$

4. A l'aide de ces intégrales particulières, on forme l'intégrale complète

$$u=\Sigma[\mathrm{A}_n e^{-\varsigma_n t}\varphi(\varsigma_n)],\ n=1,2,3,\ \text{etc.}; \qquad (6$$

5. et on détermine la constante $\mathrm{A}_n$, au moyen de l'état initial donné du problème.

(Voir la *Théorie de la Chaleur*, par Fourier, p. 340, etc.)

(Idem Lagrange, *Mécanique analytique*, tom. I, p. 347, etc.)

### 1er Exemple.

*Chercher* u=f(x,t) *étant donnée l'équation*

$$\frac{du}{dt}-b^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2du}{xdx}\right)=0, \qquad (1$$

*simultanément avec la suivante*

$$\frac{du}{dx}+cu=0, \qquad (2$$

*qui doit avoir lieu pour* x=r; (3

*la fonction* u *se réduisant à la fonction arbitraire*

$$u=F(x), \qquad (4$$

*pour* t=0.

*Solution.* On peut d'abord simplifier (1, en posant $u=\frac{y}{x}$, $y$ étant une nouvelle fonction de $x$ et de $t$; car alors on trouve :

$$\frac{du}{dt}=\frac{dy}{xdt},\ \frac{du}{dx}=\frac{dy}{xdx}-\frac{y}{x^2},\ \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2y}{xdx^2}-\frac{2dy}{x^2dx}+\frac{2y}{x^3};$$

et par suite l'équation (1 se réduit à

$$\frac{dy}{dt}-b^2\frac{d^2y}{dx^2}=0. \qquad (5$$

Or on prouve aisément que

$$y = ux = Ae^{-b^2\varsigma^2 t}\sin\varsigma x\ ,$$

satisfait à l'équation (5.

Pour que la même valeur satisfasse aussi à la relation (2, qui subsiste pour $x = r$, on doit avoir

$$\frac{Ae^{-b^2\varsigma^2 t}\varsigma\cos\varsigma x}{x} - \frac{Ae^{-b^2\varsigma^2 t}\sin\varsigma x}{x} + c\,\frac{Ae^{-b^2\varsigma^2 t}\sin\varsigma x}{x} = 0\ ,$$

pour $x = r$,

ou : $$\varsigma r - (1 - cr)\,\mathrm{tg}\, r\varsigma = 0. \qquad (7$$

Soient $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots \varsigma_n, \ldots$ les valeurs réelles de $\varsigma$ déduites de cette équation, et $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ les constantes correspondantes; l'équation (6 donnera les intégrales particulières

$$ux = A_1 e^{-b^2\varsigma_1^2 t}\sin\varsigma_1 x,\quad A_2 e^{-b^2\varsigma_2^2 t}\sin\varsigma_2 x, \ldots$$
$$A_n e^{-b^2\varsigma_n^2 t}\sin\varsigma_n x, \ldots \qquad (8$$

et on aura pour l'intégrale complète

$$xu = \Sigma\left(A_n e^{-b^2\varsigma_n^2 t}\sin\varsigma_n x\right). \qquad (9$$

Déterminons la constante générale $A_n$.

A cet effet, comme pour $t = 0$, on a $u = F(x)$, l'équation précédente donnera pour cette valeur de $t$,

$$xF(x) = \Sigma\left(A_n \sin\varsigma_n x\right). \qquad (10$$

Multiplions les deux membres par $\sin\nu x dx$, puis intégrons entre 0 et $r$, il vient :

$$\int_0^r xF(x)\sin\nu x dx = \Sigma\left[\int_0^r A_n \sin\varsigma_n x \sin\nu x dx\right],$$

$$= \Sigma\left[A_n \int_0^r \sin\varsigma_n x \sin\nu x dx\right]. \qquad (11$$

Mais on a :

$$\int_0^r \sin\varsigma_n x \sin\nu x dx = \frac{1}{\varsigma_n^2 - \nu^2}\left[\nu\sin\varsigma_n r\cos\nu r - \varsigma_n \sin\nu r\cos\varsigma_n r\right]. \quad (12$$

De plus, en supposant que $\nu$ soit pris parmi les nombres

$$\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots \varsigma_n, \ldots$$

on aura par l'équation (7 :

$$\frac{\varsigma}{\mathrm{tg}(r\varsigma_n)} - \frac{\nu}{\mathrm{tg}(\nu r)} = 0\ ;$$

d'où , $$r \sin r\varsigma_n \cos r\nu - \varsigma_n \cos r\varsigma_n \sin r\nu = 0.$$

Il suit de là et de l'équation (12, qu'en supposant $\varsigma_n$ différent de $\nu$, on aura :

$$\int_0^r \sin \varsigma_n x \sin \nu x dx = 0 ; \qquad (13$$

mais en supposant $\varsigma_n = \nu$ ; l'équation (12 donnera :

$$\int_0^r \sin^2 \varsigma_n x dx = \tfrac{0}{0} = \tfrac{1}{2}\left[ r - \frac{1}{2\varsigma_n} \sin 2r\varsigma_n \right]. \qquad (14$$

Par conséquent, en posant $\nu = \varsigma_n$, l'équation (11, devient :

$$\int_0^r x \mathrm{F}(x) \sin \varsigma_n x dx = \mathrm{A}_n \int_0^r \sin^2 \varsigma_n x dx ,$$

$$= \tfrac{1}{2} \mathrm{A}_n \left[ r - \frac{1}{2\varsigma_n} \sin 2r\varsigma_n \right] ;$$

d'où l'on tire :

$$\mathrm{A}_n = \frac{2\int_0^r x \mathrm{F}(x) \sin \varsigma_n x dx}{r - \frac{1}{2\varsigma_n} \sin 2r\varsigma_n} . \qquad (15$$

En substituant cette valeur dans (9, on trouve, pour l'intégrale cherchée :

$$u = \frac{1}{x} \Sigma \left\{ \frac{2\int_0^r x \mathrm{F}(x) \sin \varsigma_n x dx}{r - \frac{1}{2\varsigma_n} \sin 2r\varsigma_n} \right\} e^{-b^2 \varsigma_n^2 t} \sin \varsigma_n x. \qquad (16$$

Le signe $\Sigma$ désigne la somme de tous les termes qu'on obtient en posant dans l'expression qui suit ce signe, $n = 1, 2, 3$, etc.

### 2me Exemple.

*Chercher* $u = f(x, y, z)$ *étant donnée l'équation*

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0 , \qquad (1$$

*simultanément avec les suivantes :*

(2 $$k \frac{du}{dy} + hu = 0,$$ (3 $$k \frac{du}{dz} + hu = 0 ,$$

*dont la première subsiste pour* y = 1 *ou* y = — 1, *et la seconde pour* z = 1 *ou* z = — 1; *de plus on doit avoir* u = 1 *pour* x = 0; *quelque soient* y *et* z, *pourvu que ces valeurs soient comprises entre* 0 *et* 1.

*Solution.* On prouve aisément que l'équation (1 est satisfaite par

$$u = e^{-\sqrt{n^2+p^2}\cdot x} A \cos ny \cdot B \cos pz. \qquad (4$$

Mais pour que cette valeur satisfasse aussi aux équations (2 et (3, il faut que $n$ et $p$, aient les valeurs que donnent les racines des équations transcendantes :

$$-kn \sin(nl) + h \cos(nl) = 0, \quad -kp \sin(pl) + h \cos(pl) = 0,$$

ou les suivantes :

$$(nl) \operatorname{tg}(nl) = \frac{hl}{k}, \qquad (pl) \operatorname{tg}(pl) = \frac{hl}{k}. \qquad (5$$

Soient $(nl) = \varepsilon$, $(pl) = \alpha$, (6

et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots; \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \ldots$

respectivement les racines réelles des équations

$$\varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{hl}{k}, \quad \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{hl}{k},$$

on pourra désigner par $n_1, n_2$, etc., $p_1, p_2$, etc., les valeurs de $n$ et de $p$, correspondantes à ces racines, et écrire :

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{l}, \ n_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{l}, \ \ldots \ n_m = \dfrac{\varepsilon_m}{l}, \text{ etc.} \\ p_1 = \dfrac{\alpha_1}{l}, \ p_2 = \dfrac{\alpha_2}{l}, \ \ldots \ p_r = \dfrac{\alpha_r}{l}, \text{ etc.} \end{array}\right\}. \qquad (6$$

L'on voit que ces valeurs de $n$ et de $p$ deviennent toutes infinies pour $l = 0$; et par suite, pour la même hypothèse de $l$, $e^{-\sqrt{n_m^2+p_r^2}} = 0$.

Si nous marquons par $A_1$, $A_2$, etc., les valeurs de A correspondantes aux diverses valeurs de $n$, et par $B_1$, $B_2$, etc., les valeurs de B correspondantes aux diverses valeurs de $p$, on aura, pour l'expression collective de toutes les intégrales particulières :

$$e^{-x\sqrt{n_m^2+p_r^2}} A_m \cos n_m y \cdot B_r \cos p_r z; \qquad (7$$

et on les déduirait toutes de cette expression en posant $m = 1, 2, 3$, etc., $r = 1, 2, 3$, etc.

Il suit de là que l'intégrale complète pourra être exprimée par

$$u = \Sigma\left[e^{-x\sqrt{n_m^2+p_r^2}} A_m \cos n_m y \cdot B_r \cos p_r z\right]. \qquad (8$$

Observons que, pour développer cette somme, il suffira de poser d'abord

$$n = 1, 2, 3, \text{ etc.},$$

sans changer $r$, ce qui donne un premier résultat ; puis poser dans chaque terme de cette 1[re] somme

$$r = 1, 2, 3, \text{ etc.}$$

Pour déterminer les constantes générales $A_m$, $B_r$, nous devons recourir à l'état initial, qui répond à $x=0$. A cet effet, on a d'abord, pour $l=0$,

$$u = \Sigma\left[A_m \cos n_m y \cdot B_r \cos p_r z\right],$$

$$= \Sigma A_m \cos n_m y \times \Sigma B_r \cos p_r z. \qquad (9$$

Or, cette formule qui ne contient plus la variable $x$, répond aussi à $x=0$, comme le prouve la form. (8 ; et comme pour $x=0$, on a $u=1$, l'équation (9 se partagera en deux savoir :

$$1 = \Sigma(A_m \cos n_m y), \quad 1 = \Sigma(B_r \cos p_r z). \qquad (10$$

Cela posé, multiplions la première de ces équations par $\cos \nu y dy$, et intégrons entre 0 et $l$, on aura :

$$\int_0^l \cos \nu y dy = \Sigma\left[A_m \int_0^l \cos n_m y \cos \nu y dy\right]. \qquad (11$$

Mais on a :

$$\int_0^l \cos n_m y \cos \nu y dy = \tfrac{1}{2}\int_0^l \cos(n_m - \nu) y dy + \tfrac{1}{2}\int_0^l \cos(n_m+\nu) y dy,$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{n_m - \nu}\sin(n_m - \nu)l + \frac{1}{n_m+\nu}\sin(n_m+\nu)l\right], \qquad (\alpha)$$

$$= \frac{1}{2(n_m^2 - \nu^2)}\left[(n_m+\nu)\sin(n_m-\nu)l + (n_m-\nu)\sin(n_m+\nu)l\right],$$

$$= \frac{1}{n_m^2-\nu^2}\left[n_m \sin(n_m l)\cos(\nu l) - \nu\cos(n_m l)\sin(\nu l)\right].$$

De plus, si $\nu$ est pris parmi les valeurs $n_1$, $n_2$, etc., on aura, par la première des équations (5 :

$$n_m \operatorname{tg}(n_m l) = \nu \operatorname{tg}(\nu l), \qquad \text{ou :}$$

$$n_m \sin(n_m l)\cos(\nu l) - \nu \sin(\nu l)\cos(n_m l) = 0.$$

Donc, tant que $\nu$ diffère de $n_m$, on aura

$$\int_0^l \cos n_m y \cos \nu y dy = 0.$$

Mais si l'on a $\nu = \mu$, l'on voit, par ($\alpha$), que

$$\int_0^l \cos^2 n_m dy = \tfrac{1}{2}\left[ l + \frac{\sin 2n_m l}{2n_m} \right]. \qquad (12$$

Il suit de là, que l'équation (11 se réduit à

$$\int_0^l \cos n_m y dy = A_n \int_0^l \cos^2 n_m dy,$$

$$= A_n \times \tfrac{1}{2}\left[ l + \frac{\sin 2n_m l}{2n_m} \right];$$

d'où :

$$A_n = \frac{2\int_0^l \cos_m y dy}{l + \frac{\sin 2n_m l}{2n_m}}. \qquad (13$$

En opérant sur la deuxième des équations (10, d'une manière tout-à-fait semblable, on trouve :

$$B_r = \frac{2\int_0^l \cos p_r z dz}{l + \frac{\sin 2p_r l}{2p_r}}; \qquad (14$$

par conséquent l'intégrale complète sera :

$$u = \Sigma \left\{ \frac{2\int_0^l \cos n_m y dy}{l + \frac{\sin 2n_m l}{2n_m}} \cos n_m y \times \frac{2\int_0^l \cos p_r z dz}{l + \frac{\sin 2p_r l}{2p_r}} \cos p_r z \right\} e^{-x\sqrt{n_m^2 + p_r^2}}.$$

### (*b*) MÉTHODE DE POISSON.

(Voyez *Théorie de la Chaleur*, par Poisson, p. 163 et suiv.)

Soient $L = 0$, (1 $l = 0$, $l' = 0$, etc. (2 les équations données aux différences partielles, la méthode de

Poisson consiste dans les points suivants :

1. $u$ désignant l'intégrale cherchée, on pose

$$u = \Sigma\left[R_n e^{-\rho_n t}\right], \qquad (3$$

et l'on substitue le terme général $R_n e^{-\rho_n t}$ dans l'équation (1, ce qui conduira à une équation différentielle

$$v = 0. \qquad (4$$

2. On cherche l'inconnue $R_n$ de cette équation sous la forme

$$R_n = B_n f(\rho_n) + \text{etc.} \qquad (5$$

3. On substitue le même terme $R_n e^{-\rho_n t}$ dans les équations (2, ce qui fournira des équations propres à déterminer les constantes

$$\rho_1, \rho_2, \rho_n, \ldots$$

qui entrent dans les exposants de (3, et aussi propres à déterminer les constantes $B_n$, etc., de (5, ce qui permettra de mettre (5 sous la forme

$$R_n = A_n X_n,$$

et par suite (3 sous la forme

$$u = \Sigma\left[A_n X_n\right] e^{-\rho_n t}. \qquad (6$$

4. On détermine alors la constante $A_n$, par une méthode particulière dépendante de l'état initial, qui fournit non-seulement la valeur de $A_n$, mais encore des relations à l'aide desquelles on démontre *à priori* la réalité des racines, ou exposants $\rho_1$, $\rho_2$, etc.

### Exemple.

*Chercher* $u = f(x,t)$ *étant donné*

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \quad (1, \qquad (2 \left\{ \begin{array}{l} k\dfrac{du}{dx} - \varpi u = 0, \ \textit{pour} \ x = -1, \\ k\dfrac{du}{dx} + \varpi' u = 0, \ \textit{pour} \ x = +1, \end{array} \right.$$

$$u = F(x) \ \textit{pour} \ t = 0.$$

*Solution.* Soit $u = R_1 e^{-\rho_1 t} + R_2 e^{-\rho_2 t} + \text{etc.},$

$$= \Sigma\left(R_n e^{-\rho_n t}\right), \qquad (3$$

l'intégrale complète, $R_n$ étant une fonction de $x$, et de constantes; cela posé, substituons $R_n e^{-\rho_n t}$ dans (1, on trouvera l'équation différentielle

$$\frac{d^2R_n}{dx^2} + R_n \rho_n^2 = 0. \qquad (4$$

Nous avons remplacé, pour plus de simplicité, $\varsigma_n$ par $a^2\varsigma_n^2$; en sorte que l'intégrale complète est de la forme

$$u = \Sigma(R_n e^{-a^2\varsigma_n^2 t}). \qquad (5$$

En intégrant l'équation (4, qui est du second ordre, on trouve aisément :

$$R_n = B_n \sin \varsigma_n x + B_n' \cos \varsigma_n x; \qquad (6$$

$B_n$ et $B_n'$ étant les constantes introduites par cette intégration.

Pour déterminer ces constantes, en même temps que les valeurs des exposants $\varsigma_1$, $\varsigma_2$, etc. $\varsigma_n$, etc., il faudra recourir aux équations (2). En effet, pour que (3 soit l'intégrale complète, il ne suffit pas que cette expression satisfasse à (1, mais elle doit aussi satisfaire à (2; ce qui nous fournira les valeurs propres de $\varsigma_1$, $\varsigma_2$, etc., pour que (3 satisfasse à (1 et à (2 à la fois.

Or la substitution de $u = R_n e^{-\varsigma_n t}$ dans les équations (2, donne les relations :

$$7) \qquad k\frac{dR_n}{dx} - \varpi R_n = 0, \text{ pour } x = -l,$$

$$8) \qquad k\frac{dR_n}{dx} + \varpi' R_n = 0, \text{ pour } x = l.$$

En substituant dans ces équations pour $R_n$, $\frac{dR_n}{dx}$, leurs valeurs déduites de 6, puis remplaçant dans 7) $x$ par $-l$, et dans 8) $x$ par $l$, on trouvera :

$$9) \quad B_n[k\varsigma_n \cos(\varsigma_n l) + \varpi \sin(\varsigma_n l)] = B_n'[\varpi \cos(\varsigma_n l) - k\varsigma_n \sin(\varsigma_n l)],$$

$$10) \quad B_n[k\varsigma_n \cos(\varsigma_n l) + \varpi' \sin(\varsigma_n l)] = B_n'[k\varsigma_n \sin(\varsigma_n l) - \varpi' \cos(\varsigma_n l)].$$

De ces équations on tire, 1° en divisant, et en remplaçant pour plus de simplicité $\varpi$, $\varpi'$ par $k\varpi$, $k\varpi'$, l'équation transcendante

$$(\varpi\varpi' - \varsigma_n^2) \sin 2\varsigma_n l + (\varpi' + \varpi)\varsigma_n \cos 2\varsigma_n l = 0. \qquad (11$$

Nous démontrerons bientôt que les racines de cette équation sont réelles, et nous les représenterons par $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots \varsigma_n, \ldots$

De ces mêmes équations on tire, 2° en ajoutant :

$$B_n[2k\varsigma_n \cos \varsigma_n l + (\varpi + \varpi') \sin \varsigma_n l] = B_n'[(\varpi - \varpi') \cos \varsigma_n l],$$

d'où :

$$\frac{B_n}{B_n'} = \frac{(\varpi - \varpi') \cos(\varsigma_n l)}{2k\varsigma_n \cos \varsigma_n l + (\varpi + \varpi') \sin \varsigma_n l}.$$

De celle-ci on tire, $A_n$ étant une constante :

(12 $$B_n = A_n(\varpi - \varpi')\cos(\varsigma_n l),$$

(13 $$B_n' = A_n[2\varsigma_n \cos(\varsigma_n l) + (\varpi + \varpi')\sin(\varsigma_n l)].$$

En substituant ces valeurs dans (6, on a :

$$R_n = A_n \left\{ (\varpi' - \varpi) k \cos(\varsigma_n l)\sin(\varsigma_n x) - [2\varsigma_n \cos(\varsigma_n l) + (\varpi + \varpi')\sin(\varsigma_n l) k \cos(\varsigma_n x) \right\}.$$

Si nous fesons, pour abréger,

(14 $$X_n = (\varpi' - \varpi) k \cos(\varsigma_n l)\sin(\varsigma_n x) - [2\varsigma_n \cos(\varsigma_n l) + (\varpi' + \varpi)\sin(\varsigma_n l)] k \cos(\varsigma_n x),$$

on aura :

$$R_n = A_n X_n, \qquad (15$$

et par suite

$$u = \Sigma (A_n X_n \cdot e^{-\varsigma_n t}). \qquad (16$$

Il nous reste encore à déterminer la constante $A_n$. Pour cela posons

$$\int_{-l}^{l} X_n u dx = v, \qquad (17$$

d'où :

$$\int_{-l}^{l} X_n \frac{du}{dt} dx = \frac{dv}{dt}. \qquad (18$$

Cela posé, multiplions l'équation proposée (1, par $X_n dx$, puis intégrons entre $-l$ et $+l$, on aura :

$$\int_{-l}^{l} X_n \frac{du}{dt} dx = \int_{-l}^{l} a^2 \frac{d^2u}{dx^2} X_n dx,$$

où :

$$\frac{dv}{dt} = \int_{-l}^{l} a^2 \frac{d^2u}{dx^2} X_n dx. \qquad (19$$

Cette équation peut être beaucoup abrégée, en intégrant le second membre par parties ; en effet, on a :

$$\int a^2 \frac{d^2u}{dx} X_n dx = a^2 X_n \frac{du}{dx} - a^2 \int \frac{du}{dx} \cdot \frac{dX_n}{dx} dx,$$

$$\int \frac{du}{dx} \cdot \frac{dX_n}{dx} dx = u \frac{dX_n}{dx} - \int u \frac{d^2X_n}{dx^2} dx;$$

donc, en substituant la 2<sup>de</sup> dans la 1<sup>re</sup> :

$$\int a^2 \frac{d^2u}{dx^2} X_n dx = a^2 X_n \frac{du}{dx} - a^2 u \frac{dX_n}{dx} + \int a^2 u \frac{d^2X_n}{dx^2} dx + c.$$

Si nous désignons par des parenthèses ce que deviennent les deux premiers termes du second membre en remplaçant $x$ par $l$, et par des crochets, les valeurs de ces termes pour $x = -l$, l'intégrale précédente, prise entre les limites $l$ et $-l$, devient :

$$(20 \quad \int_{-l}^{l} a^2 \frac{du^2}{dx^2} X_n dx = (a^2 X_n \frac{du}{dx}) - (a^2 u \frac{dX_n}{dx}) -$$

$$[a^2 X_n \frac{du}{dx}] + [a^2 u \frac{dX_n}{dx}] + \int_{-l}^{l} a^2 u \frac{d^2X_n}{dx^2} dx.$$

Mais comme $X_n$ est la valeur de $R_n$, pour $A_n = 1$, il suit des équations (4, (7, (8, qu'on a aussi :

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} + X_n \varsigma^2_n = 0, \qquad (21$$

$$k \frac{dX_n}{dx} - \varpi X_n = 0, \quad (22, \quad \text{pour} \quad x = -l,$$

$$k \frac{dX_n}{dx} - \varpi' X_n = 0, \quad (23, \quad \text{»} \quad x = l.$$

De (21 on tire :

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -X_n \varsigma_n^2, \qquad (24$$

puis (22, (23 donnent :

$$k \frac{dX_n}{dx} = \varpi X_n, \quad \text{pour } x = -l,$$

$$k \frac{dX_n}{dx} = -\varpi' X_n, \quad \text{pour } x = +l.$$

En multipliant ces équations par $u$, et les équations (2, savoir :

$$k \frac{du}{dx} - \varpi u = 0, \text{ pour } x = -l,$$

$$k \frac{du}{dx} + \varpi' u = 0, \text{ pour } x = +l,$$

par $X_n$, on en déduit aisément :

$$(25 \quad \left\{ \begin{aligned} &(kX_n \frac{du}{dx}) - (ku \frac{dX_n}{dx}) = 0, \\ &[kX_n \frac{du}{dx}] - [ku \frac{dX_n}{dx}] = 0. \end{aligned} \right.$$

A cause de (24 et (25 la form. (20 devient :

$$\int_{-l}^{l} a^2 \frac{d^2u}{dx^2} X_n dx = -a^2 \varsigma_n^2 \int_{-l}^{l} X_n u dx = -a^2 \varsigma_n v$$

donc on trouve, à la place de (19) :

$$\frac{dv}{dt} = -a^2 \varsigma_n^2 v ;$$

d'où :

$$\frac{dv}{v} = -a^2 \varsigma_n^2 dt,$$

$$v = ce^{-a^2 \varsigma_n^2 t} \qquad (26, \quad \text{ou :} \int_{-l}^{l} X_n u dx = ce^{-a^2 \varsigma_n^2 t}$$

Pour déterminer la constante $c$, nous ferons $t=0$, et comme on a alors $x = F(x)$, il vient :

$$\int_{-l}^{l} X_n F(x) dx = c ;$$

Donc (26 devient :

$$\int_{-l}^{l} X_n u dx = e^{-a^2 \varsigma_n^2 t} \int_{-l}^{l} X_n F(x) dx. \qquad (27$$

Remettons, pour un moment, $\varsigma_n$ à la place de $a^2 \varsigma_n^2$, et remplaçons $u$ par sa valeur $\Sigma(A_n X_n e^{-\varsigma_n t})$, l'équation (27 deviendra :

$$\int_{-l}^{l} X_n \Sigma(A_n X_n) e^{-\varsigma_n t} dx = e^{-\varsigma_n t} \int_{-l}^{l} X_n F(x) dx ; \qquad (28$$

ou, en développant la somme $A_n X_n$ :

$$(29 \quad \int_{-l}^{l} X_n [A_1 X_1 e^{-\varsigma_1 t} + A_2 X_2 e^{-\varsigma_2 t} + \ldots + A_n X_n e^{-\varsigma_n t} + \ldots] dx$$

$$= e^{-\varsigma_n} \int_{-l}^{l} X_n F(x) dx.$$

De cette égalité on tire, par la comparaison des termes multipliés par $e^{-\varsigma_n t}$,

(30 $$\int_{-l}^{l} X_n [A_n X_n] dx = \int_{-l}^{l} X_n F(x) dx ;$$

et de celle-ci :

(31 $$A_n = \frac{\int_{-l}^{l} X_n F(x) dx}{\int_{-l}^{l} X_n^2 dx}.$$

En substituant cette valeur dans (16), et en remettant $a^2 \varsigma_n^2$ pour $\varsigma_n$, on a, pour l'intégrale complète cherchée :

(32 $$u = \Sigma \left\{ \frac{\int_{-l}^{l} X_n F(x) dx}{\int_{-l}^{l} X_n^2 dx} X_n \cdot e^{-a^2 \varsigma_n^2 t} \right\}.$$

Observons que l'équation (29 fournit, outre la valeur (31, encore les relations

$$\int_{-l}^{l} X_n X_1 dx = 0 , \quad \int_{-l}^{l} X_n X_2 \, dx = 0 , \text{ etc.,} \qquad (33$$

à l'aide desquelles il est facile de faire voir que les racines $\varsigma_1$, $\varsigma_2$, etc., sont toutes réelles.

En effet, démontrons, par exemple, que la racine $\varsigma_1$ est réelle Si elle était imaginaire, et par suite de la forme

$$\varsigma_1 = f + g\sqrt{-1} ,$$

il y aurait une autre racine différente de celle-ci, et de la forr

$$\varsigma_1' = f - g\sqrt{-1} .$$

Soient $X_1$ et $X_1'$ les valeurs de $X_n$ correspondantes à ces ra cela posé, ces valeurs de $X_1$ et $X_1'$ seront aussi de la forme

$$X_1 = F + G\sqrt{-1} , \quad X_1' = F - G\sqrt{-1}$$

et l'on trouvera parmi les relations (33, la suivante :

$$\int_{-l}^{l} X_1 X_1' dx = \int_{-l}^{l} (F^2 + G^2) dx = 0 ;$$

d'où l'on déduit

$$F = 0 , \quad G = 0 ,$$

en d'autres termes, $\varsigma_1$ ne peut pas affecter la forme imaginaire $\varsigma_1 = f + g\sqrt{-1}$.

*Remarque* 1. Les deux Méthodes exposées ci-dessus diffèrent essentiellement en ce que dans la première on doit démontrer d'abord, qu'une série de la forme

$$\Sigma(R_n),$$

peut représenter l'état initial, correspondant à $t=0$, et que nous donnons sous la forme d'une fonction $F(x,y,z)$, tout-à-fait arbitraire, continue ou discontinue. Cela étant l'intégrale

$$u=\Sigma(R_n e^{-s_n t}),$$

à laquelle on parvient, sera complète, c'est-à-dire, qu'elle satisfait aux équations différentielles données, et qu'elle reproduit l'état initial donné, correspondant à $t=0$.

Dans l'autre Méthode, on doit démontrer que l'inconnu, ou l'intégrale complète cherchée, est toujours de la forme,

$$u=\Sigma(R_n e^{-s_n t});$$

dans ce cas, en désignant toujours par $F(x,z)$ l'état initial, on trouve, comme conséquence, le développement de cette fonction arbitraire en série sous la forme

$$F(x,y,z)=\Sigma(R_n).$$

*Remarque* 2. Le travail le plus parfait sur l'intégration d'un système d'équations linéaires, aux différences partielles, et à coëfficients constants, est celui que M. Cauchy a publié dans le tome 1er des *Exercices d'analyse*, 1840, p. 76. Cette Méthode, très-expéditive, est d'une généralité telle qu'en l'appliquant aux questions de physique, par exemple « on n'aura plus à s'occuper de rechercher séparément les intégrales qui représentent le mouvement du son, de la chaleur, les vibrations des corps élastiques, etc.; le problème devra être censé résolu dans tous les cas dès que l'on sera parvenu aux équations différentielles ou aux différences partielles. » Nous regrettons que le cadre trop peu étendu de cet ouvrage, ne nous permette pas de donner une analyse de cet utile Mémoire.

FIN.

**TABLE** des valeurs de $\int_t^{\infty} e^{-t^2}dt = G$, et de ses log. de $\frac{1}{1000}$ en $\frac{1}{1000}$; pour toutes les valeurs de $t$, de $t=0$, à $t=3$,

(Extraite du Traité de Kramp sur les Réfr. Astro.)

| $t$ | G. | Δ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ | $\Delta^4$ | log. G. | Δ | $\Delta^2$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.88622692 | 999968 | 201 | 199 | | 9.9475448 | 49280 | 558 | 0.00 |
| 0.01 | 0.87622724 | 999767 | 400 | 199 | | 9.9426168 | 49838 | 557 | 0.01 |
| 0.02 | 0.86622957 | 999367 | 599 | 200 | | 9.9376330 | 50395 | 562 | 0.02 |
| 0.03 | 0.85623590 | 998768 | 799 | 199 | | 9.9325935 | 50957 | 563 | 0.03 |
| 0.04 | 0.84624822 | 997969 | 998 | 197 | | 9,9274978 | 51520 | 567 | 0.04 |
| 0.05 | 0.83626853 | 996971 | 1195 | 199 | | 9.9223458 | 52087 | 567 | 0.05 |
| 0.06 | 0 82629882 | 995776 | 1394 | 196 | | 9.9171371 | 52654 | 573 | 0.06 |
| 0.07 | 0.81634106 | 994382 | 1590 | 195 | | 9.9118717 | 53227 | 572 | 0.07 |
| 0.08 | 0.80639724 | 992792 | 1785 | 194 | | 9.9065490 | 53799 | 577 | 0.08 |
| 0.09 | 0.79646932 | 991007 | 1979 | 195 | | 9.9011691 | 54376 | 580 | 0.09 |
| 0.10 | 0.78655925 | 989028 | 2174 | 192 | | 9.8957315 | 54956 | 580 | 0.10 |
| 0.11 | 0.77666897 | 986854 | 2366 | 190 | | 9.8902359 | 55536 | 583 | 0.11 |
| 0.12 | 0.76680043 | 984488 | 2556 | 189 | | 9.8846823 | 56119 | 587 | 0.12 |
| 0.13 | 0.75695555 | 981932 | 2745 | 188 | | 9.8790704 | 56706 | 588 | 0.13 |
| 0.14 | 0.74713623 | 979187 | 2933 | 186 | | 9.8733998 | 57294 | 591 | 0.14 |
| 0.15 | 0.73734436 | 976254 | 3119 | 184 | | 9.8676704 | 57885 | 594 | 0.15 |
| 0.16 | 0.72758182 | 973135 | 3303 | 183 | | 9.8618819 | 58479 | 595 | 0.16 |
| 0.17 | 0.71785047 | 969832 | 3486 | 180 | | 9.8560340 | 59074 | 598 | 0.17 |
| 0.18 | 0.70815215 | 966346 | 3666 | 175 | | 9.8501266 | 59672 | 600 | 0.18 |
| 0.19 | 0.69848869 | 962680 | 3841 | 178 | | 9.8441594 | 60272 | 604 | 0.19 |
| 0.20 | 0.68886189 | 958839 | 4019 | 173 | | 9.8381322 | 60876 | 602 | 0.20 |
| 0.21 | 0.67927350 | 954820 | 4192 | 171 | | 9.8320446 | 61478 | 610 | 0.21 |
| 0.22 | 0.66972530 | 950628 | 4363 | 168 | | 9.8258968 | 62088 | 607 | 0.22 |
| 0.23 | 0.66021902 | 946265 | 4531 | 166 | | 0.8196880 | 62695 | 613 | 0.23 |
| 0.24 | 0.65075637 | 941734 | 4697 | 163 | | 9.8134185 | 63308 | 613 | 0 24 |
| 0.25 | 0.64133903 | 937037 | 4860 | 160 | | 9.8070877 | 63921 | 617 | 0.25 |
| 0.26 | 0.63196866 | 932177 | 5020 | 157 | | 9.8006956 | 64538 | 617 | 0.26 |
| 0.27 | 0.62264689 | 927157 | 5177 | 155 | | 9.7942418 | 65155 | 620 | 0.27 |
| 0.28 | 0.61337532 | 921980 | 5332 | 151 | | 9.7877263 | 65775 | 623 | 0.28 |
| 0.29 | 0.60415552 | 916648 | 5483 | 149 | | 9.7811488 | 66398 | 624 | 0.29 |
| 0.30 | 0.59498904 | 911165 | 5632 | 145 | | 9.7745090 | 67022 | 627 | 0.30 |
| 0.31 | 0.58587739 | 905533 | 5777 | 142 | | 9.7678068 | 67649 | 629 | 0.31 |
| 0.32 | 0.57682206 | 899756 | 5919 | 138 | | 9.7610419 | 68278 | 629 | 0.32 |
| 0.33 | 0.56782450 | 893837 | 6057 | 136 | | 9.7542141 | 68907 | 635 | 0.33 |
| 0.34 | 0.55888613 | 887780 | 6193 | 131 | | 9.7473234 | 69542 | 632 | 0.34 |
| 0.35 | 0.55000833 | 881587 | 6324 | 129 | | 9.7403692 | 70174 | 638 | 0.35 |
| 0.36 | 0.54119246 | 875263 | 6453 | 125 | | 9.7333518 | 70812 | 640 | 0.36 |
| 0 37 | 0.53243983 | 868810 | 6578 | 121 | | 9.7262706 | 71452 | 639 | 0.37 |
| 0.38 | 0.52375173 | 862232 | 6699 | 118 | | 9.7191254 | 72091 | 642 | 0.38 |

| $t$ | G. | Δ | $Δ^2$ | $Δ^3$ | $Δ^4$ | log. G. | Δ | $Δ^2$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.39 | 0.51512941 | 855533 | 6817 | 114 | | 9.7119163 | 72733 | 646 | 0.39 |
| 0.40 | 0.50657408 | 848716 | 6931 | 110 | | 9.7046430 | 73379 | 645 | 0.40 |
| 0.41 | 0.49808692 | 841785 | 7041 | 107 | | 9.6973051 | 74024 | 650 | 0.41 |
| 0.42 | 0.48966907 | 834744 | 7148 | 103 | | 9.6899027 | 74674 | 648 | 0.42 |
| 0.43 | 0.48132163 | 827596 | 7251 | 98 | | 9.6824353 | 75322 | 653 | 0.43 |
| 0.44 | 0.47304567 | 820345 | 7349 | 97 | | 9.6749031 | 75975 | 654 | 0.44 |
| 0.45 | 0.46484222 | 812996 | 7446 | 90 | | 9.6673056 | 76629 | 655 | 0.45 |
| 0.46 | 0.45671226 | 805550 | 7536 | 88 | | 9.6596427 | 77284 | 659 | 0.46 |
| 0.47 | 0.44865676 | 798014 | 7624 | 85 | | 9.6519143 | 77943 | 663 | 0.47 |
| 0.48 | 0.44067662 | 790390 | 7709 | 78 | | 9.6441200 | 78606 | 656 | 0.48 |
| 0.49 | 0.43277272 | 782681 | 7787 | 77 | | 9.6362598 | 79262 | 662 | 0.49 |
| 0.50 | 0.42494591 | 774894 | 7864 | 71 | | 9.6283336 | 79924 | 666 | 0.50 |
| 0.51 | 0.41719697 | 767030 | 7935 | 69 | | 9.6203412 | 80590 | 666 | 0.51 |
| 0.52 | 0.40952667 | 759095 | 8004 | 64 | | 9.6122822 | 81256 | 668 | 0.52 |
| 0.53 | 0.40193572 | 751091 | 8068 | 61 | | 9.6041566 | 81924 | 669 | 0.53 |
| 0.54 | 0.39442481 | 743023 | 8129 | 55 | | 9.5959642 | 82593 | 672 | 0.54 |
| 0.55 | 0 38699458 | 734894 | 8184 | 54 | | 9.5877049 | 83265 | 673 | 0.55 |
| 0.56 | 0.37964564 | 726710 | 8238 | 48 | | 9.5793784 | 83938 | 673 | 0.56 |
| 0.57 | 0.37237854 | 718472 | 8286 | 45 | | 9.5709846 | 84611 | 678 | 0.57 |
| 0.58 | 0.36519382 | 710186 | 8331 | 40 | | 9.5625235 | 85289 | 678 | 0.58 |
| 0.59 | 0.35809196 | 701855 | 8371 | 38 | | 9.5539946 | 85967 | 678 | 0.59 |
| 0.60 | 0.35107341 | 693484 | 8409 | 34 | | 9.5453979 | 86645 | 683 | 0.60 |
| 0.61 | 0.34413857 | 685075 | 8443 | 28 | | 9.5367334 | 87328 | 681 | 0.61 |
| 0.62 | 0.33728782 | 676632 | 8471 | 27 | | 9.5280006 | 88009 | 684 | 0.62 |
| 0.63 | 0.33052150 | 668161 | 8498 | 22 | | 9.5191997 | 88693 | 687 | 0.63 |
| 0.64 | 0.32383989 | 659663 | 8520 | 19 | | 9.5103304 | 89380 | 687 | 0.64 |
| 0.65 | 0.31724326 | 651143 | 8539 | 14 | | 9.5013924 | 90067 | 688 | 0.65 |
| 0.66 | 0.31073183 | 642604 | 8553 | 12 | | 9.4923857 | 90755 | 690 | 0.66 |
| 0.67 | 0.30430579 | 634051 | 8565 | 6 | | 9.4833102 | 91445 | 693 | 0.67 |
| 0.68 | 0.29796528 | 625486 | 8571 | 6 | | 9.4741657 | 92138 | 692 | 0.68 |
| 0.69 | 0.29171042 | 616915 | 8577 | 0 | | 9.4649519 | 92830 | 696 | 0.69 |
| 0.70 | 0.28554127 | 608338 | 8577 | 2 | | 9.4556689 | 93526 | 695 | 0.70 |
| 0.71 | 0.27945789 | 599761 | 8575 | 7 | | 9.4463163 | 94221 | 697 | 0.71 |
| 0,72 | 0.27346028 | 591186 | 8568 | 8 | | 9.4368942 | 94918 | 700 | 0.72 |
| 0.73 | 0.26754842 | 582618 | 8560 | 14 | | 9.4274024 | 95618 | 700 | 0.73 |
| 0.74 | 0.26172224 | 574058 | 8546 | 15 | | 9.4178406 | 96318 | 700 | 0.74 |
| 0.75 | 0.25598166 | 565512 | 8531 | 20 | | 9.4082088 | 97018 | 706 | 0.75 |
| 0.76 | 0.25032654 | 556981 | 8511 | 21 | | 9.3985070 | 97724 | 703 | 0.76 |
| 0.77 | 0.24475673 | 548470 | 8490 | 25 | | 9.3887346 | 98427 | 706 | 0.77 |
| 0.78 | 0.23927203 | 539980 | 8465 | 29 | | 9.3788919 | 99133 | 707 | 0.78 |
| 0.79 | 0.23387223 | 531515 | 8436 | 31 | | 9.3689786 | 99839 | 710 | 0.79 |
| 0.80 | 0.22855708 | 523079 | 8405 | 33 | | 9.3589947 | 100549 | 709 | 0.80 |

| t | G. | Δ | Δ² | Δ³ | Δ⁴ | log. G. | Δ | Δ² | t. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.81 | 0.22332629 | 514674 | 8372 | 37 | | 9.3489398 | 101258 | 711 | 0.81 |
| 0.82 | 0.21817955 | 506302 | 8335 | 39 | | 9.3388140 | 101969 | 712 | 0.82 |
| 0.83 | 0.21311653 | 497967 | 8296 | 42 | | 9.3286171 | 102681 | 714 | 0.83 |
| 0.84 | 0.20813686 | 489671 | 8254 | 45 | | 9.3183490 | 103395 | 714 | 0.84 |
| 0.85 | 0.20324015 | 481417 | 8209 | 46 | | 9.3080095 | 104109 | 718 | 0.85 |
| 0.86 | 0.19842598 | 473208 | 8163 | 50 | | 9.2975986 | 104827 | 716 | 0 86 |
| 0.87 | 0.19369390 | 465045 | 8113 | 52 | | 9.2871159 | 105543 | 719 | 0.87 |
| 0.88 | 0.18904345 | 456932 | 8061 | 54 | | 9.2765616 | 106262 | 719 | 0.88 |
| 0.89 | 0.18447413 | 448871 | 8007 | 56 | | 9.2659354 | 106981 | 722 | 0.89 |
| 0.90 | 0.17998542 | 440864 | 7951 | 58 | | 9.2552373 | 107703 | 721 | 0.90 |
| 0.91 | 0.17557678 | 432913 | 7893 | 61 | | 9.2444670 | 108424 | 724 | 0.91 |
| 0.92 | 0.17124765 | 425020 | 7832 | 62 | | 9.2336246 | 109148 | 724 | 0.92 |
| 0.93 | 0.16699745 | 417188 | 7770 | 65 | | 9.2227098 | 109872 | 727 | 0.93 |
| 0.94 | 0.16282557 | 409418 | 7705 | 66 | | 9.2117226 | 110599 | 724 | 0.94 |
| 0.95 | 0.15873139 | 401713 | 7639 | 67 | | 9.2006627 | 111323 | 731 | 0.95 |
| 0.96 | 0.15471426 | 394074 | 7572 | 71 | | 9.1895304 | 112054 | 726 | 0.96 |
| 0.97 | 0.15077352 | 386502 | 7501 | 70 | | 9.1783250 | 112780 | 733 | 0.97 |
| 0.98 | 0.14690850 | 379001 | 7431 | 74 | | 9.1670470 | 113513 | 729 | 0.98 |
| 0.99 | 0.14311849 | 371570 | 7357 | 74 | | 9.1556957 | 114242 | 734 | 0.99 |
| 1.00 | 0.13940279 | 364213 | 7283 | 75 | | 9.1442715 | 114976 | 732 | 1.00 |
| 1.01 | 0.13576066 | 356930 | 7208 | 77 | | 9.1327739 | 115708 | 736 | 1.01 |
| 1.02 | 0.13219136 | 349722 | 7131 | 80 | | 9.1212031 | 116444 | 733 | 1.02 |
| 1.03 | 0.12869414 | 342591 | 7051 | 78 | | 9.1095587 | 117177 | 739 | 1.03 |
| 1.04 | 0.12526823 | 335540 | 6973 | 81 | | 9.0978410 | 117916 | 736 | 1.04 |
| 1.05 | 0.12191283 | 328567 | 6892 | 81 | | 9.0860494 | 118652 | 741 | 1.05 |
| 1.06 | 0.11862716 | 321675 | 6811 | 83 | | 9.0741842 | 119393 | 737 | 1.06 |
| 1.07 | 0.11541041 | 314864 | 6728 | 83 | | 9.0622449 | 120130 | 742 | 1.07 |
| 1.08 | 0.11226177 | 308136 | 6645 | 85 | | 9.0502319 | 120872 | 741 | 1.08 |
| 1.09 | 0.10918041 | 301491 | 6560 | 85 | | 9.0381447 | 121613 | 743 | 1.09 |
| 1.10 | 0.10616550 | 294931 | 6475 | 86 | | 9.0259834 | 122356 | 744 | 1.10 |
| 1.11 | 0.10321619 | 288456 | 6389 | 85 | | 9.0137478 | 123100 | 743 | 1.11 |
| 1.12 | 0.10033163 | 282067 | 6304 | 88 | | 9.0014378 | 123843 | 747 | 1.12 |
| 1.13 | 0.09751096 | 275763 | 6216 | 87 | | 8 9890535 | 124590 | 746 | 1.13 |
| 1.14 | 0.09475333 | 269547 | 6129 | 89 | | 8.9765945 | 125336 | 748 | 1.14 |
| 1.15 | 0.09205786 | 263418 | 6040 | 87 | | 8.9640609 | 126084 | 748 | 1.15 |
| 1.16 | 0.08942368 | 257378 | 5953 | 89 | | 8.9514525 | 126832 | 750 | 1.16 |
| 1.17 | 0.08684990 | 251425 | 5864 | 89 | | 8.9387693 | 127582 | 749 | 1.17 |
| 1.18 | 0.08433565 | 245561 | 5775 | 89 | | 8.9260111 | 128331 | 751 | 1.18 |
| 1.19 | 0.08188004 | 239786 | 5686 | 88 | | 8.9131780 | 129082 | 753 | 1.19 |
| 1.20 | 0.07948218 | 234100 | 5598 | 91 | | 8.9002698 | 129835 | 753 | 1.20 |
| 1.21 | 0.07714118 | 228502 | 5507 | 88 | | 8.8872863 | 130588 | 753 | 1.21 |
| 1.22 | 0.07485616 | 222995 | 5419 | 90 | | 8.8742275 | 131341 | 755 | 1.22 |

| t | G. | Δ | Δ² | Δ³ | Δ⁴ | log. G. | Δ | Δ² | t |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.23 | 0.07262621 | 217576 | 5329 | 88 | | 8.8610934 | 132096 | 755 | 1.23 |
| 1.24 | 0.07045045 | 212247 | 5241 | 90 | | 8.8478838 | 132851 | 758 | 1.24 |
| 1.25 | 0.068327982 | 2070061 | 51513 | 888 | | 8.8345987 | 133609 | 756 | 1.25 |
| 1.26 | 0.066257921 | 2018548 | 50625 | 886 | | 8.8212378 | 134365 | 758 | 1.26 |
| 1.27 | 0.064239373 | 1967923 | 49739 | 884 | | 8.8078013 | 135123 | 759 | 1.27 |
| 1.28 | 0.062271450 | 1918184 | 48855 | 880 | | 8.7942890 | 135882 | 759 | 1.28 |
| 1.29 | 0.060353266 | 1869329 | 47975 | 876 | | 8.7807008 | 136641 | 762 | 1.29 |
| 1.30 | 0.058483937 | 1821354 | 47099 | 872 | | 8.7670367 | 137403 | 761 | 1.30 |
| 1.31 | 0.056662583 | 1774255 | 46227 | 868 | | 8.7532964 | 138164 | 761 | 1.31 |
| 1.32 | 0.054888328 | 1728028 | 45359 | 863 | | 8.7394800 | 138925 | 764 | 1.32 |
| 1.33 | 0.053160300 | 1682669 | 44496 | 859 | | 8.7255875 | 139689 | 764 | 1.33 |
| 1.34 | 0.051477631 | 1638173 | 43637 | 850 | | 8.7116186 | 140453 | 764 | 1.34 |
| 1.35 | 0.049839458 | 1594536 | 42787 | 847 | | 8.697533 | 141217 | 765 | 1.35 |
| 1.36 | 0.048244922 | 1551749 | 41940 | 840 | | 8.6834516 | 141982 | 766 | 1.36 |
| 1.37 | 0.046693173 | 1509809 | 41100 | 833 | | 8.6692534 | 142748 | 768 | 1.37 |
| 1.38 | 0.045183364 | 1468709 | 40267 | 826 | | 8.6549786 | 143516 | 766 | 1.38 |
| 1.39 | 0.043714655 | 1428442 | 39441 | 819 | | 8.6406270 | 144282 | 769 | 1.39 |
| 1.40 | 0.042286213 | 1389001 | 38622 | 812 | | 8.6261988 | 145051 | 769 | 1.40 |
| 1.41 | 0.040897212 | 1350379 | 37810 | 802 | | 8.6116937 | 145820 | 770 | 1.41 |
| 1.42 | 0.039546833 | 1312569 | 37008 | 797 | | 8.5971117 | 146590 | 770 | 1.42 |
| 1.43 | 0.038234264 | 1275561 | 36211 | 786 | | 8.5824527 | 147360 | 771 | 1.43 |
| 1.44 | 0.036958703 | 1239350 | 35425 | 779 | | 8.5677167 | 148131 | 773 | 1.44 |
| 1.45 | 0.035719353 | 1203925 | 34646 | 771 | | 8.5529036 | 148904 | 771 | 1.45 |
| 1.46 | 0.034515428 | 1169279 | 33875 | 760 | | 8.5380132 | 149675 | 774 | 1.46 |
| 1.47 | 0.033346149 | 1135404 | 33115 | 751 | | 8.5230457 | 150449 | 774 | 1.47 |
| 1.48 | 0.032210745 | 1102289 | 32364 | 743 | | 8.5080008 | 151223 | 775 | 1.48 |
| 1.49 | 0.031108456 | 1069925 | 31621 | 734 | | 8.4928785 | 151998 | 775 | 1.49 |
| 1 50 | 0.030038531 | 1038304 | 30887 | 723 | | 8.4776787 | 152773 | 776 | 1.50 |
| 1.51 | 0.0290002273 | 10074170 | 301638 | 7133 | | 8.4624014 | 153549 | 777 | 1.51 |
| 1.52 | 0.0279928103 | 9772532 | 294505 | 7036 | | 8.4470465 | 154326 | 777 | 1.52 |
| 1.53 | 0.0270155571 | 9478027 | 287469 | 6937 | | 8.4316139 | 155103 | 777 | 1.53 |
| 1.54 | 0.0260677544 | 9190558 | 280532 | 6834 | | 8.4161036 | 155880 | 781 | 1.54 |
| 1.55 | 0.0251486986 | 8910026 | 273698 | 6740 | | 8.4005156 | 156661 | 779 | 1.55 |
| 1.56 | 0.0242576960 | 8636328 | 266958 | 6624 | | 8.3848495 | 157440 | 778 | 1.56 |
| 1.57 | 0.0233940632 | 8369370 | 260334 | 6527 | | 8.3691055 | 158218 | 781 | 1.57 |
| 1.58 | 0.0225571262 | 8109036 | 253807 | 6422 | | 8.3532837 | 158999 | 781 | 1.58 |
| 1.59 | 0.0217462226 | 7855229 | 247385 | 6318 | | 8.3373838 | 159780 | 782 | 1.59 |
| 1.60 | 0.0209606997 | 7607844 | 241067 | 6213 | | 8.3214058 | 160562 | 783 | 1.60 |
| 1.61 | 0.0201999153 | 7366777 | 234854 | 6104 | | 8.3053496 | 161345 | 783 | 1.61 |
| 1.62 | 0.0194632376 | 7131923 | 228750 | 6003 | 108 | 8.2892151 | 162128 | 784 | 1.62 |
| 1.63 | 0.0187500453 | 6903173 | 222747 | 5895 | 107 | 8.2730023 | 162912 | 783 | 1.63 |
| 1.64 | 0.0180597280 | 6680426 | 216852 | 5788 | 104 | 8.2567111 | 163695 | 784 | 1.64 |

| *t* | G. | Δ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ | $\Delta^4$ | log. G. | Δ | $\Delta^2$ | *t* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.65 | 0.0173916854 | 6463574 | 211064 | 5684 | 110 | 8.2403416 | 164479 | 787 | 1.65 |
| 1.66 | 0.0167453280 | 6252510 | 205380 | 5574 | 102 | 8.2238937 | 165266 | 785 | 1.66 |
| 1.67 | 0.0161200770 | 6047130 | 199806 | 5472 | 100 | 8.2073671 | 166051 | 787 | 1.67 |
| 1.68 | 0.0155153640 | 5847324 | 194334 | 5372 | 122 | 8.1907620 | 166838 | 787 | 1.68 |
| 1.69 | 0.0149306316 | 5652990 | 188962 | 5250 | 89 | 8.1740782 | 167625 | 788 | 1.69 |
| 1.70 | 0.0143653326 | 5464028 | 183712 | 5161 | 110 | 8.1573157 | 168413 | 787 | 1.70 |
| 1.71 | 0.0138189298 | 5280316 | 178551 | 5051 | 103 | 8.1404744 | 169200 | 790 | 1.71 |
| 1.72 | 0.0132908982 | 5101765 | 173500 | 4948 | 100 | 8.1235544 | 169990 | 789 | 1.72 |
| 1.73 | 0.0127807217 | 4928265 | 168552 | 4848 | 107 | 8.1065554 | 170779 | 792 | 1.73 |
| 1.74 | 0.0122878952 | 4759713 | 163704 | 4741 | 99 | 8.0894775 | 171571 | 785 | 1.74 |
| 1.75 | 0.0118119239 | 4596009 | 158963 | 4642 | 102 | 8.0723204 | 172356 | 795 | 1.75 |
| 1.76 | 0.0113523230 | 4437046 | 154321 | 4540 | 98 | 8.0550848 | 173151 | 790 | 1.76 |
| 1.77 | 0.0109086184 | 4282725 | 149781 | 4442 | 102 | 8.0377697 | 173941 | 792 | 1.77 |
| 1.78 | 0.0104803459 | 4132944 | 145339 | 4340 | 95 | 8.0203756 | 174733 | 792 | 1.78 |
| 1.79 | 0.0100670515 | 3987605 | 140999 | 4245 | 99 | 8.0029023 | 175525 | 795 | 1.79 |
| 1.80 | 0.0096682910 | 3846606 | 136754 | 4146 | 96 | 7 9853498 | 176320 | 792 | 1.80 |
| 1.81 | 0.0092836304 | 3709852 | 132608 | 4050 | 96 | 7.9677178 | 177112 | 794 | 1.81 |
| 1.82 | 0.0089126452 | 3577244 | 128558 | 3954 | 91 | 7.9500066 | 177906 | 794 | 1.82 |
| 1.83 | 0.0085549208 | 3448686 | 124604 | 3863 | 96 | 7.9322160 | 178700 | 797 | 1.83 |
| 1.84 | 0.0082100522 | 3324082 | 120741 | 3767 | 88 | 7.9143460 | 179497 | 793 | 1.84 |
| 1.85 | 0.0078776440 | 3203341 | 116974 | 3679 | 95 | 7.8963963 | 180290 | 798 | 1.85 |
| 1.86 | 0.0075573099 | 3086367 | 113295 | 3584 | 86 | 7.8783673 | 181088 | 795 | 1.86 |
| 1.87 | 0.0072486732 | 2973072 | 109711 | 3498 | 90 | 7.8602585 | 181883 | 797 | 1.87 |
| 1.88 | 0.0069513660 | 2863361 | 106213 | 3408 | 84 | 7.8420702 | 182680 | 799 | 1.88 |
| 1.89 | 0.0066650299 | 2757148 | 102805 | 3324 | 90 | 7.8238022 | 183479 | 796 | 1.89 |
| 1.90 | 0.0063893151 | 2654343 | 99481 | 3234 | 79 | 7.8054543 | 184275 | 799 | 1.90 |
| 1.91 | 0.0061238808 | 2554862 | 96247 | 3155 | 85 | 7.7870268 | 185074 | 800 | 1.91 |
| 1.92 | 0.0058683946 | 2458615 | 93092 | 3070 | 83 | 7.7685194 | 185874 | 797 | 1.92 |
| 1.93 | 0.0056225331 | 2365523 | 90022 | 2987 | 80 | 7.7499320 | 186671 | 801 | 1.93 |
| 1.94 | 0.0053859808 | 2275501 | 87035 | 2907 | 76 | 7.7312649 | 187472 | 801 | 1.94 |
| 1.95 | 0.0051584307 | 2188466 | 84128 | 2831 | 79 | 7.7125177 | 188273 | 800 | 1.95 |
| 1.96 | 0.0049395841 | 2104338 | 81297 | 2752 | 84 | 7.6936904 | 189073 | 801 | 1.96 |
| 1.97 | 0.0047291503 | 2023041 | 78545 | 2668 | 53 | 7.6747831 | 189874 | 801 | 1.97 |
| 1.98 | 0.0045268462 | 1944496 | 75877 | 2615 | 94 | 7.6557957 | 190675 | 801 | 1.98 |
| 1.99 | 0.0043323966 | 1868619 | 73262 | 2521 | 65 | 7.6367282 | 191476 | 804 | 1.99 |
| 2.00 | 0.00414553469 | 17953570 | 707406 | 24558 | 700 | 7.6175806 | 192280 | 803 | 2.00 |
| 2.01 | 0.00396599899 | 17246164 | 682848 | 23858 | 697 | 7.5983526 | 193083 | 802 | 2.01 |
| 2.02 | 0.00379353735 | 16563316 | 658990 | 23161 | 674 | 7.5790443 | 193885 | 804 | 2.02 |
| 2.03 | 0.00362790419 | 15904326 | 635829 | 22487 | 658 | 7.5596558 | 194689 | 804 | 2.03 |
| 2.04 | 0.00346886093 | 15268497 | 613342 | 21829 | 651 | 7.5401869 | 195493 | 805 | 2.04 |
| 2.05 | 0.00331617596 | 14655155 | 591513 | 21178 | 646 | 7.5206376 | 196298 | 804 | 2.05 |
| 2.06 | 0.00316962441 | 14063642 | 570335 | 20532 | 603 | 7.5010078 | 197102 | 806 | 2.06 |

| t | G. | Δ | Δ² | Δ³ | Δ⁴ | log. G. | Δ | Δ² | t |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.07 | 0.00302898799 | 13493307 | 549803 | 19929 | 622 | 7.4812976 | 197908 | 806 | 2.07 |
| 2.08 | 0.00289405492 | 12943504 | 529874 | 19307 | 591 | 7.4615068 | 198714 | 805 | 2.08 |
| 2.09 | 0.00276461988 | 12413630 | 510567 | 18716 | 574 | 7.4416354 | 199519 | 807 | 2.09 |
| 2.10 | 0.00264048358 | 11903063 | 491851 | 18142 | 582 | 7.4216835 | 200326 | 807 | 2.10 |
| 2.11 | 0.00252145295 | 11411212 | 473709 | 17560 | 543 | 7.4016509 | 201133 | 808 | 2.11 |
| 2.12 | 0.00240734083 | 10937503 | 456149 | 17017 | 537 | 7.3815376 | 201941 | 806 | 2.12 |
| 2.13 | 0.00229796580 | 10481354 | 439132 | 16480 | 540 | 7.3613435 | 202747 | 809 | 2.13 |
| 2.14 | 0.00219315226 | 10042222 | 422652 | 15940 | 510 | 7.3410688 | 203556 | 808 | 2.14 |
| 2.15 | 0.00209273004 | 9619570 | 406712 | 15430 | 496 | 7.3207132 | 204364 | 809 | 2.15 |
| 2.16 | 0.00199653434 | 9212858 | 391282 | 14934 | 497 | 7.3002768 | 205173 | 809 | 2.16 |
| 2.17 | 0.00190440576 | 8821576 | 376348 | 14437 | 478 | 7.2797595 | 205982 | 809 | 2.17 |
| 2.18 | 0.00181619000 | 8445228 | 361911 | 13959 | 457 | 7.2591613 | 206791 | 810 | 2.18 |
| 2.19 | 0.00173173772 | 8083317 | 347952 | 13502 | 459 | 7.2384822 | 207601 | 812 | 2.19 |
| 2.20 | 0.00165090455 | 7735365 | 334450 | 13043 | 439 | 7.2177221 | 208413 | 809 | 2.20 |
| 2.21 | 0.00157355090 | 7400915 | 321407 | 12604 | 432 | 7.1968808 | 209222 | 812 | 2.21 |
| 2.22 | 0.00149954175 | 7079508 | 308803 | 12172 | 411 | 7.1759586 | 210034 | 809 | 2.22 |
| 2.23 | 0.00142874667 | 6770705 | 296631 | 11761 | 408 | 7.1549552 | 210843 | 814 | 2.23 |
| 2.24 | 0 00136103962 | 6474074 | 284870 | 11353 | 399 | 7.1338709 | 211657 | 812 | 2.24 |
| 2.25 | 0.00129629888 | 6189204 | 273517 | 10954 | 380 | 7.1127052 | 212469 | 811 | 2.25 |
| 2.26 | 0.00123440684 | 5915687 | 262563 | 10574 | 375 | 7.0914583 | 213280 | 814 | 2.26 |
| 2.27 | 0.00117524997 | 5653124 | 251989 | 10199 | 359 | 7.0701303 | 214094 | 812 | 2.27 |
| 2.28 | 0.00111871873 | 5401135 | 241790 | 9840 | 354 | 7.0487209 | 214906 | 814 | 2.28 |
| 2.29 | 0.00106470738 | 5159345 | 231950 | 9486 | 340 | 7.0272303 | 215720 | 814 | 2.29 |
| 2.30 | 0.00101311393 | 4927395 | 222464 | 9146 | 331 | 7.0056583 | 216534 | 813 | 2.30 |
| 2.31 | 0.00096383998 | 4704931 | 213318 | 8815 | 324 | 6.9840049 | 217347 | 815 | 2.31 |
| 2.32 | 0.00091679067 | 4491613 | 204503 | 8491 | 309 | 6.9622702 | 218162 | 815 | 2.32 |
| 2.33 | 0.00087187454 | 4287110 | 196012 | 8182 | 303 | 6.9404540 | 218977 | 814 | 2.33 |
| 2.34 | 0.00082900344 | 4091098 | 187830 | 7879 | 292 | 6.9185563 | 219791 | 816 | 2.34 |
| 2.35 | 0.00078809246 | 3903268 | 179951 | 7587 | 287 | 6.8965772 | 220607 | 815 | 2.35 |
| 2.36 | 0.00074905978 | 3723317 | 172364 | 7300 | 271 | 6.8745165 | 221422 | 816 | 2.36 |
| 2.37 | 0.00071182661 | 3550953 | 165064 | 7029 | 268 | 6.8523743 | 222238 | 819 | 2.37 |
| 2.38 | 0.00067631708 | 3385889 | 158035 | 6761 | 260 | 6.8301505 | 223057 | 813 | 2.38 |
| 2.39 | 0.00064245819 | 3227854 | 151274 | 6501 | 245 | 6.8078448 | 223870 | 819 | 2.39 |
| 2.40 | 0.00061017965 | 3076580 | 144773 | 6256 | 244 | 6.7854578 | 224689 | 816 | 2.40 |
| 2.41 | 0.00057941385 | 2931807 | 138517 | 6012 | 234 | 6.7629889 | 225505 | 818 | 2.41 |
| 2.42 | 0.00055009578 | 2793290 | 132505 | 5778 | 226 | 6.7404384 | 226323 | 819 | 2.42 |
| 2.43 | 0.00052216288 | 2660785 | 126727 | 5552 | 216 | 6.7178061 | 227142 | 817 | 2.43 |
| 2.44 | 0.00049555503 | 2534058 | 121175 | 5336 | 212 | 6.6950919 | 227959 | 818 | 2.44 |
| 2.45 | 0.00047021445 | 2412883 | 115839 | 5124 | 204 | 6.6722960 | 228777 | 819 | 2.45 |
| 2.46 | 0.00044608562 | 2297044 | 110715 | 4920 | 196 | 6.6494183 | 229596 | 820 | 2.46 |
| 2.47 | 0.00042311518 | 2186329 | 105795 | 4724 | 191 | 6.6264587 | 230416 | 818 | 2.47 |
| 2.48 | 0.00040125189 | 2080534 | 101071 | 4533 | 183 | 6 6034171 | 231234 | 821 | 2.48 |

| t | G. | Δ | Δ² | Δ³ | Δ⁴ | log. G. | Δ | Δ² | t |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.49 | 0.00038044655 | 1979463 | 96538 | 4350 | 177 | 6.5802937 | 232055 | 819 | 2.49 |
| 2.50 | 0.00036065192 | 1882925 | 92188 | 4173 | 171 | 6.5570882 | 232874 | 818 | 2.50 |
| 2.51 | 0.00034182267 | 1790737 | 88015 | 4002 | 164 | 6.5338008 | 233692 | 823 | 2.51 |
| 2.52 | 0.00032391530 | 1702722 | 84013 | 3838 | 160 | 6.5104316 | 234515 | 821 | 2.52 |
| 2.53 | 0.00030688808 | 1618709 | 80175 | 3678 | 152 | 6.4869801 | 235336 | 819 | 2.53 |
| 2.54 | 0.00029070099 | 1538534 | 76497 | 3526 | 148 | 6.4634465 | 236155 | 823 | 2.54 |
| 2.55 | 0.00027531565 | 1462037 | 72971 | 3378 | 142 | 6.4398310 | 236978 | 821 | 2.55 |
| 2.56 | 0.00026069528 | 1389066 | 69593 | 3236 | 137 | 6.4161332 | 237799 | 822 | 2.56 |
| 2.57 | 0.00024680462 | 1319473 | 66357 | 3099 | 131 | 6.3923533 | 238621 | 821 | 2.57 |
| 2.58 | 0.00023360989 | 1253116 | 63258 | 2968 | 128 | 6.3684912 | 239442 | 823 | 2.58 |
| 2.59 | 0.00022107873 | 1189858 | 60290 | 2840 | 121 | 6.3445470 | 240265 | 823 | 2.59 |
| 2.60 | 0.00020918015 | 1129568 | 57450 | 2719 | 119 | 6.3205205 | 241088 | 823 | 2.60 |
| 2.61 | 0.00019788447 | 1072118 | 54731 | 2600 | 112 | 6.2964117 | 241911 | 822 | 2.61 |
| 2.62 | 0.00018716329 | 1017387 | 52131 | 2488 | 108 | 6.2722206 | 242733 | 823 | 2.62 |
| 2.63 | 0.00017698942 | 965256 | 49643 | 2380 | 105 | 6.2479473 | 243556 | 825 | 2.63 |
| 2.64 | 0.00016733686 | 915613 | 47263 | 2275 | 101 | 6.2235917 | 244381 | 823 | 2.64 |
| 2.65 | 0.00015818073 | 868350 | 44988 | 2174 | 95 | 6.1991536 | 245204 | 826 | 2.65 |
| 2.66 | 0.00014949723 | 823362 | 42814 | 2079 | 94 | 6.1746332 | 246030 | 822 | 2.66 |
| 2.67 | 0.00014126361 | 780548 | 40735 | 1985 | 88 | 6.1500302 | 246852 | 825 | 2.67 |
| 2.68 | 0.00013345813 | 739813 | 38750 | 1897 | 85 | 6.1253450 | 247677 | 824 | 2.68 |
| 2.69 | 0.00012606000 | 701063 | 36853 | 1812 | 83 | 6.1005773 | 248501 | 827 | 2.69 |
| 2.70 | 0.00011904937 | 664210 | 35041 | 1729 | 78 | 6.0757272 | 249328 | 825 | 2.70 |
| 2.71 | 0.00011240727 | 629169 | 33312 | 1651 | 76 | 6.0507944 | 250153 | 825 | 2.71 |
| 2.72 | 0.00010611558 | 595857 | 31661 | 1575 | 71 | 6.0257791 | 250978 | 826 | 2.72 |
| 2.73 | 0.00010015701 | 564196 | 30086 | 1504 | 70 | 6.0006813 | 251804 | 824 | 2.73 |
| 2.74 | 0.00009451505 | 534110 | 28582 | 1434 | 67 | 5.9755009 | 252628 | 829 | 2.74 |
| 2.75 | 0.00008917395 | 505528 | 27148 | 1367 | 64 | 5.9502381 | 253457 | 825 | 2.75 |
| 2.76 | 0.00008411867 | 478380 | 25781 | 1303 | 59 | 5.9248924 | 254282 | 828 | 2.76 |
| 2.77 | 0.00007933487 | 452599 | 24478 | 1244 | 60 | 5.8994642 | 265110 | 827 | 2.77 |
| 2.78 | 0.00007480888 | 428121 | 23234 | 1184 | 56 | 5.8739532 | 255937 | 826 | 2.78 |
| 2.79 | 0.00007052767 | 404887 | 22050 | 1128 | 53 | 5.8484595 | 256763 | 828 | 2.79 |
| 2.80 | 0.00006647880 | 382837 | 20922 | 1075 | 51 | 5.8226832 | 257591 | 828 | 2.80 |
| 2.81 | 0.00006265043 | 361915 | 19847 | 1024 | 49 | 5.7969241 | 258419 | 827 | 2.81 |
| 2.82 | 0.00005903128 | 342068 | 18823 | 975 | 48 | 5.7710822 | 259246 | 829 | 2.82 |
| 2.83 | 0.00005561060 | 323245 | 17848 | 927 | 43 | 5.7451576 | 260075 | 827 | 2.83 |
| 2.84 | 0.00005237815 | 305397 | 16921 | 884 | 45 | 5.7191501 | 260902 | 828 | 2.84 |
| 2.85 | 0.00004932418 | 288476 | 16037 | 839 | 39 | 5.6930599 | 261730 | 831 | 2.85 |
| 2.86 | 0.00004643942 | 272439 | 15198 | 800 | 40 | 5.6668869 | 262561 | 827 | 2.86 |
| 2.87 | 0.00004371503 | 257241 | 14398 | 760 | 38 | 5.6406308 | 263388 | 831 | 2.87 |
| 2.88 | 0.00004114262 | 242843 | 13638 | 722 | 34 | 5.6142920 | 264219 | 827 | 2.88 |
| 2.89 | 0.00003871419 | 229205 | 12916 | 688 | 36 | 5.5878701 | 265046 | 831 | 2.89 |
| 2.90 | 0.00003642214 | 216289 | 12228 | 652 | 31 | 5.5613655 | 265877 | 829 | 2.90 |

| t | G. | Δ | Δ² | Δ³ | Δ⁴ | log. G. | Δ | Δ² | t |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.91 | 0.00003425925 | 204061 | 11576 | 621 | 32 | 5.5347778 | 266706 | 829 | 2.91 |
| 2.92 | 0.00003221864 | 192485 | 10955 | 589 | 29 | 5.5081072 | 267535 | 832 | 2 92 |
| 2.93 | 0.00003029379 | 181530 | 10366 | 560 | 29 | 5.4813537 | 268367 | 830 | 2.93 |
| 2.94 | 0.00002847849 | 171164 | 9806 | 531 | 27 | 5.4545170 | 269197 | 831 | 2.94 |
| 2.95 | 0.00002676685 | 161358 | 9275 | 504 | 25 | 5.4275973 | 270028 | 831 | 2.95 |
| 2.96 | 0.00002515327 | 152083 | 8771 | 479 | 24 | 5.4005945 | 270859 | 830 | 2.96 |
| 2.97 | 0.00002363244 | 143312 | 8292 | 455 | | 5.3735086 | 271689 | 831 | 2.97 |
| 2.98 | 0.00002219932 | 135020 | 7837 | | | 5.3463397 | 272520 | 832 | 2.98 |
| 2.99 | 0.00002084912 | 127183 | | | | 5.3190877 | 273352 | | 2.99 |
| 3.00 | 0.00001957729 | | | | | 5.2917525 | | | 3.00 |

# TABLE DES MATIÈRES.

## IIIe LIVRE.

### 1re SECTION.



### 2me SECTION.

*Séries de Fourier et de Lagrange.*



### 3me SECTION.

*Expression des fonctions arbitraires par les intégrales doubles et multiples de Fourier.*



### 4me SECTION.

## IV<sup>me</sup> LIVRE.

### 1<sup>re</sup> SECTION.



### 2<sup>me</sup> SECTION.



### 3<sup>me</sup> SECTION.



## V<sup>me</sup> LIVRE.



## VI<sup>me</sup> LIVRE.



FIN DE LA TABLE.

